Н. А. Шапошниковъ.

(Рѣжица Витебской губ.)

КРИТИЧЕСКІЯ ЗАМѢТКИ

ПО ВОПРОСАМЪ

МАТЕМАТИКИ

ВЪ СВЯЗИ СЪ ПРЕПОДАВАНІЕМЪ ЕЯ.



МОСКВА.
Типографія Императорскаго Московскаго Университета.
1912.

Введеніе.

Изданіе настоящей книги имѣетъ цѣлью представить г.г. преподавателямъ математики и вообще лицамъ, интересующимся этой наукой, рядъ доказательныхъ соображеній въ оправданіе той системы изложенія основъ, которая развита въ моихъ теоретическихъ учебникахъ. Раньше, нѣсколько лѣтъ назадъ, это могло казаться излишнимъ. Послѣдовательно успѣшное расширеніе изданій, многочисленные одобрительные отзывы, постоянныя заимствованія у меня другими авторами, все указывало на развивающуюся оцѣнку моихъ трудовъ. Но, въ послѣднее время, отношеніе къ этимъ трудамъ наличнаго состава Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія сдѣлалось вполнѣ отрицательнымъ. Учебникамъ, которые при прежнемъ составѣ того же Комитета были одобрены и частью даже рекомендованы, прегражденъ теперь доступъ въ учебныя заведенія. То, что раньше признавалось образцовымъ по глубинѣ мысли и простотѣ изложенія, теперь неожиданно оказалось совершенно неудовлетворительнымъ.

Сложившіяся съ начала моей дѣятельности особо благопріятныя обстоятельства навели меня на мысль выполнить работу, которую я всегда считалъ и продолжаю считать крайне трудною, а при иныхъ обстоятельствахъ и невыполнимою. Дѣло заключалось въ нормальной философской и педагогической обработкѣ основныхъ отдѣловъ чистой математики, до сихъ поръ еще не получившихъ такой обработки. Объясню сейчасъ же, почему я счелъ себя въ силахъ и въ правѣ взяться за такую отвѣтственную задачу. Не придаю особаго значенія тому, все-таки не маловажному, обстоятельству, что мнѣ пришлось въ теченіе большей части моей дѣятельности соединять труды преподавателя элементарной науки и профессора высшей. Также и тому, что я пріобрѣталъ особо большую опытность, преподавая въ разное время въ двухъ мужскихъ гимназіяхъ, одной женской, на разныхъ частныхъ курсахъ, въ Университетѣ, Техническомъ училищѣ и Межевомъ институтѣ. Считаю наиболѣе основательнымъ выставить на видъ, что, немедленно по окончаніи магистерскихъ экзаменовъ, подготовка къ которымъ была признана моими экзаменаторами очень широкой, я началъ и затѣмъ въ теченіе десяти лѣтъ безпрерывно продолжалъ препо-

даваніе на женскихъ высшихъ курсахъ, гдѣ, по исключительному стеченію условій, совмѣстилъ въ своемъ лицѣ почти всю корпорацію университетскихъ профессоровъ математики. Кромѣ всѣхъ элементарныхъ ученій, я неоднократно излагалъ обширные, именно любительскіе, курсы по длинному ряду отдѣловъ высшей математики. Такъ какъ притомъ эти лекціи совмѣщались съ лекціями и уроками въ другихъ учебныхъ учрежденіяхъ и моими личными занятіями, а также самостоятельными работами въ области наиболѣе широкихъ ученій интегрированія уравненій съ частными производными и теоріи векторовъ пространства, то, можно сказать, я ежедневно вращался долгіе годы въ сферѣ всей математики отъ ея началъ до крайнихъ вершинъ. Множество возникавшихъ при этомъ сопоставленій, новыхъ выводовъ и критическихъ замѣчаній, съ одной стороны укрѣпили для меня извѣстное утвержденіе о важномъ общемъ значеніи изученія математики, но вмѣстѣ съ тѣмъ раскрыли множество недостатковъ современнаго ея преподаванія.

Съ давнихъ временъ возникло и многими философами утверждалось мнѣніе, что въ рядѣ наукъ математика занимаетъ одно изъ важнѣйшихъ мѣстъ. Нерѣдко называли ее матерью наукъ, и это утвержденіе имѣло основаніе уже въ томъ, что строгое развитіе математики началось раньше созиданія другихъ опредѣленныхъ отраслей знанія. Но не первенство историческаго развитія обусловило для этой науки ея почетное мѣсто. Къ этому повело преимущество метода, отчасти наиболѣе простого, а вмѣстѣ особо проникновеннаго. Уже древніе геометры, въ изслѣдуемой ими области, показали, что путемъ математическаго отвлеченнаго умозрѣнія можно раскрывать факты и явленія внѣшняго міра. Геометрическія теоремы представляли именно первые, опредѣленно сознанные, натуралистическіе факты, открытіе которыхъ было выполнено не путемъ наблюденія и опыта, а только умозрѣніемъ.

Древніе философы считали изученіе математики необходимымъ основаніемъ всякаго научнаго знанія. Извѣстна характерная надпись, сдѣланная Платономъ на воротахъ его академіи: „Никто, не знающій геометріи, сюда да не входитъ“. „Числа“, говорилъ Пиѳагоръ, „суть начала вещей“. При всемъ томъ, эти мыслители еще не усматривали тѣхъ широкихъ перспективъ, которыя открылись впослѣдствіи въ дѣлѣ примѣненія математики къ конкретнымъ прикладнымъ наукамъ. Обширность и важность этихъ примѣненій опредѣлили значеніе математическаго умозаключенія, какъ самостоятельнаго орудія изслѣдованія, которое не только конкуриро-

вало съ реальными орудіями—наблюденіемъ и опытомъ, но нерѣдко оставляло ихъ далеко позади.

Но значеніе математики не только опредѣляется ея ролью, какъ самостоятельной науки, и ея отношеніемъ къ ближайшимъ прикладнымъ наукамъ. Особо важно еще ея педагогическое значеніе, ея роль въ дѣлѣ общаго образованія и развитія ума. Съ этой стороны мы также встрѣчаемся съ фактомъ, если и не единогласнаго, то массоваго признанія достоинства этой науки. Благотворное педагогическое вліяніе изученія математики признавалось и въ древности, и въ болѣе новыя времена.

Каждая наука напрягаетъ и развиваетъ извѣстныя способности человѣка. Одностороннее развитіе дѣлаетъ умъ обучающагося мало способнымъ къ тѣмъ родамъ дѣятельности, въ которыхъ онъ недостаточно упражненъ. Но образованіе по энциклопедическому идеалу никому недоступно, и потому въ системахъ обученія преслѣдуются лишь важнѣйшія цѣли. Роль математики во всѣхъ этихъ системахъ должна быть основной, потому что, помимо ея практической надобности, она развиваетъ умъ въ тѣхъ его качествахъ, которые безусловно необходимы всякому мыслящему лицу.

Изучающій математику, при нормальномъ ея преподаваніи, изучаетъ самые законы мышленія и притомъ знакомится съ ними не отвлеченно, какъ въ логикѣ, по отдаленному руководительству со стороны, а практически, субъективно, постоянно прилагая эти законы во всѣхъ умозрительныхъ построеніяхъ этой науки. Математика занимается самими идеями въ ихъ наичище кристаллизованной формѣ. Математическія истины суть самыя простыя, самыя полныя и самыя общія.

Вслѣдствіе простоты этихъ истинъ, отношеніе къ нимъ нашего сознанія отличается наибольшей непосредственностью. Строгое изолированіе предметовъ сужденія есть важнѣйшій актъ мышленія. Такое изолированіе достигаетъ въ математическихъ сужденіяхъ своей высшей степени. Въ то же время оно представляетъ наименьшія затрудненія для сознанія.

Полнота математическихъ истинъ доставляетъ такое разнообразіе выводовъ, какого мы не встрѣчаемъ въ другихъ отдѣлахъ знаній. Весь неизмѣримый матеріалъ математики есть совокупность выводовъ, сдѣланныхъ изъ очень небольшого числа основныхъ положеній. Но каждый выводъ представляетъ особую, рѣзко очерченную форму сознанія. Поэтому математика постоянно упражняетъ умъ чрезвычайно разнообразными пріемами сужденія.

Общность математическихъ истинъ обусловливаетъ почти полное отсутствіе исключеній. При занятіяхъ математикой мы имѣемъ дѣло съ абсолютными истинами. Эти занятія пріучаютъ умъ къ сужденіямъ, абсолютно точнымъ. Въ другихъ наукахъ мы почти не встрѣчаемъ подобнаго же матеріала.

Есть еще одна характерная особенность математики, указаніе на которую заслуживаетъ вниманія. Воспріятіе математическихъ истинъ не зависитъ отъ нашего субъективнаго къ нимъ отношенія. Эта полная объективность заключеній имѣетъ особое вліяніе на умъ изучающаго. Математическія занятія убиваютъ слѣпую вѣру въ авторитеты, но вмѣстѣ съ тѣмъ совершенствуютъ пріемы личной критики. Они развиваютъ скептицизмъ особаго рода, не предвзятый или внушенный извнѣ, а постоянно дѣятельный, безпристрастный. Привыкнувъ къ той обстоятельности, съ которой изслѣдуется всякій мельчайшій вопросъ въ математикѣ, усвоивъ пріемы самой строгой провѣрки каждаго, даже маловажнаго заключенія, развитой математически умъ скорѣе всего способенъ относиться съ наибольшей осмотрительностью и вниманіемъ къ каждому новому факту.

Правильная постановка изученія математики въ школахъ имѣла бы широко развѣтвленныя благія послѣдствія. Она воспитывала бы юношество трудоспособное, довѣрчивое къ системѣ обученія, вліяніе котораго замѣчало бы на собственномъ послѣдовательномъ развитіи. Посильный молодому уму трудъ, усложняясь лишь постепенно, обусловливалъ бы спокойное отношеніе къ дѣлу и возрастающій интересъ къ нему. Усвоеніе пріемовъ точнаго, безстрастнаго мышленія способствовало бы утвержденію вообще зрѣлой критики и сознательнаго общаго міросозерцанія.

Все вышесказанное относится, однако, къ дѣйствительной математикѣ, какова она сама въ себѣ, какъ наука. Но то же самое имѣетъ очень малое отношеніе къ наличной,—позволю себѣ сказать,—фальсификаціи этой науки, какая преподается въ элементарныхъ школахъ, а иногда даже и въ высшихъ. Объ общихъ недостаткахъ нашихъ школъ писали много. Но нельзя сказать, чтобы обстоятельно разсматривали частный вопросъ постановки преподаванія математики. Въ критическихъ статьяхъ по этому поводу обсуждались раньше лишь сравнительно мелочныя детали. Между тѣмъ, положеніе дѣла требуетъ широкаго и общаго анализа.

Изъ отдѣловъ элементарной математики только геометрія преподается въ школахъ научно и съ достаточнымъ педагогическимъ

обоснованіемъ. Этотъ отдѣлъ уже во времена Эвклида сложился въ форму систематизированной и логически обработанной науки. Сверхъ того, именно тому же отдѣлу посчастливилось въ дальнѣйшей прогрессировавшей обработкѣ. Да и въ настоящее время улучшающая дѣло критика сосредоточивается главнымъ образомъ на томъ же ученіи, вообще болѣе легкомъ для разбора его не сложнаго матеріала.

Въ иномъ положеніи находятся три остальные отдѣла элементовъ, въ особенности ариѳметика и алгебра. Эти части математики до сихъ поръ не были достаточно обработаны въ научномъ отношеніи. Понятія и факты, анализируемые здѣсь, наиболѣе отвлеченны, трудны для глубокаго уясненія и важны по ихъ широкой роли. Изучается же такой матеріалъ по учебникамъ, составленнымъ, за рѣдкими исключеніями, лицами, мало компетентными въ дѣлѣ.

Авторы большинства учебниковъ — односторонніе спеціалисты, чаще преподаватели элементарной науки, лишь поверхностно знакомые съ высшей, да и позабывшіе послѣднюю, иногда же профессора, знатоки по нѣкоторымъ, болѣе или менѣе узкимъ, спеціальностямъ, но не продумавшіе профессіонально основъ науки и не охватившіе достаточно общую философію ея. Сказанное не относится только къ русской литературѣ. Учебники иностранные въ той же мѣрѣ представляютъ образцы научнаго недомыслія и педагогической безтактности. Современное математическое образованіе, въ области упомянутыхъ отдѣловъ, вообще поставлено ложно, больше со вредомъ для дѣла умственнаго развитія учащихся, чѣмъ съ пользой для этого.

Послѣдняя мода обученія ариѳметикѣ и началамъ алгебры не допускаетъ сообщенія ученикамъ точныхъ опредѣленій понятій и общихъ научныхъ доказательствъ. Это считается недоступнымъ пониманію въ раннемъ возрастѣ. Взамѣнъ того даютъ рецептурную формулировку разныхъ условій и правилъ, а самодѣятельность учащихся стремятся развивать на массѣ частныхъ упражненій. Но правила, принимаемыя на вѣру, безъ логическаго ихъ обоснованія, не могутъ быть прочно усвоены и въ примѣненіи на практикѣ должны приводить къ неясностямъ и къ недоразумѣніямъ, разрѣшаемымъ только опросами руководителей. Личное критическое отношеніе къ дѣлу учениковъ этимъ способомъ обученія устраняется. Ученики привыкаютъ къ мысли, что разсуждать и вычислять нужно такъ, какъ показываетъ имъ учитель или репетиторъ, а не такъ, какъ того же требовали бы разумъ, логика.

Съ другой стороны, методы рѣшенія задачъ систематически не разъясняются. Безсистемные, обыкновенно, сборники таковыхъ, не снабженные поясненіями главнаго матеріала, какъ бы претендуютъ на то, чтобы ученики сами вырабатывали тѣ способы рѣшенія, которые открывались раньше зрѣлыми мыслителями, притомъ въ длительной послѣдовательности. Такая работа недоступна не только среднимъ способностямъ, но и высшимъ. Развитіе же способностей необходимо обусловливается субъективной вѣрой въ возможность такого развитія, т.-е. послѣдовательнымъ ощутительнымъ успѣхомъ. Принципы дѣла, а также общіе и спеціальные пріемы нужно сообщать извнѣ, a priori, съ яснымъ логическимъ обоснованіемъ. Для субъективной разработки всегда останется много частнаго матеріала. При иной системѣ обученія, дѣйствительная самодѣятельность учащихся развивается лишь въ сторону пріобрѣтенія ключей, контрабандныхъ объяснительныхъ пособій. Вмѣстѣ же съ тѣмъ въ умы учениковъ внѣдряется грустное сознаніе, что ихъ личныя способности будто бы слабы, недостаточны для выполненія требованій, будто бы нормальныхъ.

Недостаточная въ учебникахъ, а иногда ради пропедевтики или изъ иныхъ соображеній извращенная обработка логическаго матеріала науки имѣетъ дальнѣйшія и болѣе важныя послѣдствія. Нужно принять въ расчетъ, что такіе учебники распространены вездѣ издавна. Многіе современные руководители математическаго образованія сами обучены по тѣмъ же системамъ и не отошли отъ нихъ далеко. Вслѣдствіе этого ихъ собственное научное развитіе мало соотвѣтствуетъ истинному. Въ учебную литературу и въ обиходъ преподаванія проникаетъ и твердо тамъ устанавливается совершенно неточный, частью безграмотный языкъ. Условныя сокращенія и упрощенія рѣчи постепенно теряютъ признакъ условности и становятся уже не сокращеніями, а искаженіями. Пропедевтическія упрощенія разсужденій иногда утрачиваютъ важнѣйшіе элементы логическаго обоснованія. Наконецъ, мѣстами обнаруживается несомнѣнный хаосъ мышленія.

Однимъ изъ крупнѣйшихъ дефектовъ современнаго обученія математикѣ я считаю систему условнаго символизма въ алгебрѣ. Взамѣнъ строгаго отграниченія алгебры отъ ариѳметики, обоснованнаго указаніемъ совершенно новыхъ во второмъ отдѣлѣ опредѣленій количества, соотношеній и дѣйствій, этотъ второй, въ дѣйствительности вполнѣ изолированный, отдѣлъ стремятся вывести изъ ариѳметики, путемъ подбора особыхъ условій, прини-

маемыхъ по соглашенію. Такая система построенія курса развита французскими математиками, преимущественно Бертраномъ. Со стороны этихъ авторовъ выполненную работу можно разсматривать какъ нѣкоторый tour de force, какъ доказательство логической возможности, хотя и съ натяжками, подобнаго построенія ученія. Въ смыслѣ чисто логическаго упражненія дѣло способно представить извѣстный интересъ. Но самая система отнюдь не можетъ считаться нормальной. Подтасовка условій подъ извѣстные факты, добытые исторически другимъ путемъ, остается только фальсификаціей дѣйствительнаго логическаго пути. Вначалѣ, въ вопросѣ введенія отрицательныхъ количествъ дѣло еще обстоитъ сносно. Но съ естественнымъ развитіемъ ученія, съ обнаруженіемъ новыхъ понятій и фактовъ требуется опять безплодное въ сущности и мелочное остроуміе для подбора дальнѣйшихъ, оправдывающихъ факты условій. Такъ, по отношенію къ мнимымъ количествамъ наличный строй подобнаго ученія уже не выдерживаетъ самой простой логической критики. Во всякомъ случаѣ, упомянутая система, какъ сказано выше, можетъ претендовать лишь на частный литературный интересъ. Примѣненіе же ея къ общему и притомъ начальному преподаванію составляетъ крайній абсурдъ. Ученикамъ, не ознакомляемымъ съ инымъ, естественнымъ строемъ развитія ученія, условныя соглашенія должны представляться неожиданными, парадоксальными и въ ближайшемъ ихъ примѣненіи мало оправдываемыми. При естественномъ, логическомъ пути мышленія, каждая принципіальная идея, сообщенная ученику, подлежитъ уже ближайшему развитію въ умѣ этого самаго ученика, и дальнѣйшее руководительство преподавателя или книги лишь направляетъ и оформливаетъ заработавшую самостоятельно мысль. Подтасовка же условій подъ факты созидается самими авторами путемъ обратнаго процесса разсужденія отъ развитаго къ исходному. Прямымъ путемъ такой строй мышленія ни въ чьемъ умѣ иначе, какъ случайно, развиваться не можетъ.

Признавъ, давно уже, существующее направленіе преподаванія математики ложнымъ и прямо вреднымъ, я послѣдовательно боролся съ этимъ направленіемъ, издавая учебники болѣе научнаго характера. Девизомъ моей литературно-педагогической дѣятельности было убѣжденіе въ томъ, что точная и вѣрная наука доступна всякому здоровому уму. Слѣдовало, по моему, поднимать незрѣлый умъ до дѣйствительнаго пониманія научныхъ истинъ, а не искажать науку условнымъ пониженіемъ ея логическаго уровня.

Такое пониманіе должно создавать лишь привычку къ поверхностнымъ, близорукимъ сужденіямъ.

Оглядываясь назадъ, я вижу, что успѣлъ достигнуть многаго. Не буду ссылаться на обширное распространеніе составленныхъ мною съ сотрудникомъ сборниковъ задачъ. Изъ нихъ наиболѣе распространенный алгебраическій я оцѣниваю лишь какъ компромиссъ между наличнымъ преподаваніемъ и тѣмъ, которое слѣдовало бы считать правильнымъ. Для моихъ цѣлей имѣли значеніе устойчивость и хотя медленный прогрессъ теоретическихъ сочиненій. Въ нихъ я лишь въ мелочахъ дѣлалъ уступки современности, въ главномъ же смотрѣлъ вдаль. И я замѣчалъ постоянно, что новѣйшія книги другихъ авторовъ не шли въ разрѣзъ съ моими, а постепенно приближались къ развиваемой мною системѣ.

Дѣло шло бы нормальнымъ путемъ, если бы у насъ осуществлялась свободная конкуренція учебныхъ книгъ подъ единственной санкціей близкихъ къ дѣлу педагогическихъ совѣтовъ. Казалось бы, что для сочиненій, хотя математическихъ, не затрогивающихъ никакихъ вопросовъ соціальной или политической жизни, а только факты безпристрастной науки, спеціальная цензура совершенно излишня. Однако она существуетъ, и въ силу ея допустима не та наука и не тѣ учебные принципы, какіе оправдываются единственно ихъ содержаніемъ, а лишь все то, что усвоили себѣ два, три лица, безконтрольно и самовластно рѣшающія въ этой области всѣ вопросы. Лишь собственное развитіе этихъ лицъ и ихъ личные вкусы направляютъ у насъ все дѣло математическаго образованія.

Рѣзко отрицательное отношеніе къ моимъ книгамъ Ученаго Комитета Мин. Нар. Просв. обнаружилось съ тѣхъ поръ, какъ я въ 1904-мъ году представилъ учебникъ алгебры и новый курсъ тригонометріи для соисканія высшей литературно-учебной преміи. Я имѣлъ смѣлость считать эти сочиненія наиболѣе оригинальными въ современной элементарно-математической литературѣ и наилучше обработанными. Отвѣтъ Комитета выразился въ необычайно хлесткой рецензіи профессора К., вынудившей меня напечатать дословный ея разборъ. Затѣмъ послѣдовала подобная же рецензія второй части учебника алгебры. Наконецъ, академикъ С. разобралъ съ той же манерой первую часть учебника, и указанныя книги, а заодно съ ними и руководство ариѳметики были устранены отъ доступа въ учебныя заведенія. Полагаю, что издаваемая мною теперь книга освѣтитъ все это дѣло надлежащимъ образомъ.

Нормальные способы рѣшенія ариѳметическихъ задачъ.

Самая широкая классификація ариѳметическихъ задачъ различаетъ тѣ изъ нихъ, которыя считаются собственно „ариѳметическими“, отъ другихъ, которыя называются задачами „алгебраическаго“ характера. Нельзя не замѣтить, что этотъ выборъ классифицирующихъ терминовъ совершенно не выдерживаетъ логической критики. Во-первыхъ, нѣтъ смысла часть матеріала одной и той же науки считать ей соотвѣтствующей, а другую часть, охватываемую, однако, той же наукой, относить куда-то въ сторону. Во-вторыхъ, терминъ „алгебраическій“ для незнакомыхъ съ алгеброй является совершенно непонятнымъ, а для знакомыхъ оказывается въ наличномъ примѣненіи вообще непомѣрно суженнымъ, а притомъ и неопредѣленнымъ.

Упомянутая неудачная классификація должна на дѣлѣ обусловливаться различеніемъ двухъ процессовъ мышленія. Разсужденіе отъ даннаго къ искомому слѣдуетъ называть синтезомъ или по русски „выводомъ“. Разсужденіе отъ искомаго къ данному нужно назвать анализомъ, по русски „разборомъ“. Тогда всѣ ариѳметическія задачи будутъ различаться опредѣленно, какъ синтетическія, иначе выводныя, и аналитическія, иначе разборныя.

Болѣе частная классификація ариѳметическихъ задачъ распредѣлила многія изъ нихъ по спеціальнымъ „правиламъ“. Установились понятія и термины: „простое тройное правило“, сложное тройное правило, правило товарищества, смѣшенія одного и другого рода, цѣпное и другіе. Терминъ „тройное“ филологически соотвѣтствуетъ „троекратному“, хотя никакой троекратности въ примѣненіи правила нѣтъ. Но, и не принимая въ расчетъ филологическихъ требованій, нельзя называть, какъ это дѣлаютъ, вычисленіе по признаку заданія трехъ чиселъ, потому что вычисленія съ такимъ же количествомъ заданій встрѣчаются во многихъ, совершенно иныхъ, вопросахъ. Не болѣе смысла и въ терминѣ „сложное тройное правило“, потому что кратность повторенія пріема не имѣетъ отношенія къ числу три и количество данныхъ оказывается инымъ. Упомянутыя правила нужно, по существу ихъ,

называть, первое—правиломъ вычисленія пропорціональной величины, второе—правиломъ вычисленія сложно-пропорціональной величины.

Термины—„правило товарищества, простое и сложное", нужно замѣнить научными, вполнѣ отчетливыми, терминами—правило пропорціональнаго дѣленія и правило сложно-пропорціональнаго дѣленія. Смѣшенія раздѣляютъ на смѣшеніе 1-го рода и 2-го рода, оставляя различіе неопредѣленнымъ. Чтобы установить отчетливость, нужно правило 1-го рода назвать—правиломъ опредѣленія смѣси, а 2-е—правиломъ распредѣленія смѣси. Цѣпное правило названо такъ по признаку, во-первыхъ, внѣшнему, а во-вторыхъ и мало сходному съ отмѣчаемой характеристикой. Взамѣнъ этого слѣдуетъ ввести вполнѣ точный терминъ—правило перевода мѣръ. Изъ употребительныхъ названій позволительно сохранить лишь названія—правило процентовъ и правило учета векселей.

Но, скажутъ по поводу этихъ моихъ замѣчаній, сущность ариѳметики не въ словесныхъ терминахъ, въ ней установленныхъ. Были бы только ясно опредѣлены и утверждены самыя понятія, а тогда они и при дефектныхъ ихъ терминахъ передадутся правильно отъ руководителей къ руководимымъ. Однако, и съ этой стороны, современное ариѳметическое ученіе не выдерживаетъ логической критики. Прежде всего, самое основное понятіе науки, понятіе о числѣ опредѣляется въ ариѳметикѣ и слишкомъ узко, и, что еще важнѣе, совершенно не въ соотвѣтствіи съ главнымъ матеріаломъ этой науки.

Число опредѣляютъ въ ариѳметикѣ, какъ „результатъ счета". Это опредѣленіе настолько узаконено, что, когда я въ своихъ „Основаніяхъ ариѳметики и алгебры" отмѣтилъ еще другое опредѣленіе числа, какъ результата сравненія величинъ, то утвержденіе такой двойственности понятія показалось одному критику небывалымъ новшествомъ и недопустимой дикостью. Г. П., занимающій видное мѣсто старшаго преподавателя одной изъ столичныхъ гимназій, обрушился на меня статьей въ одномъ изъ офиціальныхъ органовъ, въ которой между прочимъ сказано: [Одно изъ двухъ: или понятіе о числѣ, образуемое при счетѣ, и понятіе о числѣ, образуемое при сравненіи, суть понятія различныя, или же счетъ и сравненіе, поскольку оно играетъ роль въ образованіи числа, суть дѣйствія тождественныя. Но, такъ какъ до-

стовѣрно, что получаемыя при обоихъ этихъ актахъ понятія тождественны, то первое предположеніе должно быть отброшено, какъ приводящее къ нелѣпости, а второе должно быть признано вѣрнымъ]. Своевременно я отвѣтилъ на эту статью многими разъясненіями, указавъ, напр., что опредѣленіе числа, какъ результата счета, охватываетъ лишь цѣлыя и дробныя числа, не достигая уже несоизмѣримыхъ, а второе опредѣленіе — какъ результата сравненія величинъ узаконяетъ и тригонометрическія количества, и мнимые комплексы, плоскостные и пространственные, получаемые при сравненіи разнонаправленныхъ плоскостныхъ или пространственныхъ прямыхъ линій. Но и не въ такой отдаленной сферѣ отмѣчается не замѣченное г. П. различіе понятій о числѣ.

Указанныя два опредѣленія числа, какъ и многія иныя математическія опредѣленія, почти сливаются въ основахъ науки, но съ развитіемъ ея обособляются постепенно мало замѣтными оттѣнками, однако настолько, что, наконецъ, становятся не уподобляемыми. Общепринятое опредѣленіе числа, какъ результата счета, пригодно для самыхъ началъ ариѳметики, но съ развитіемъ ея постепенно теряетъ значеніе и должно быть скоро замѣнено вторымъ опредѣленіемъ.

Разсмотримъ равенство $x+3=8$, опредѣляющее дѣйствіе вычитаніе изъ числа 8 числа 3. Совмѣщая здѣсь опредѣленіе дѣйствія съ опредѣленіемъ числа 3, какъ результата счета трехъ отдѣльныхъ единицъ, пишемъ равенство въ видѣ $x+1+1+1=8$. Этотъ видъ показываетъ, что мы можемъ получить остатокъ x, производя обратный счетъ трехъ единицъ отъ 8-ми. Здѣсь число x есть еще результатъ счета, но уже обратнаго. По свойству перемѣстительности сложенія, можно написать данное равенство въ иномъ видѣ $3+x=8$. Тогда этимъ равенствомъ или его однозначущей формой $3+1+1+\cdots+1=8$ будетъ опредѣляться не вычитаніе, а новое дѣйствіе—разностное сравненіе. Искомую разность начинающіе ученики будутъ уже инстинктивно опредѣлять не прямымъ счетомъ, а пробными сравненіями, увеличивая меньшее изъ данныхъ чиселъ на постепенно возрастающіе прибавки. Прямымъ результатомъ счета здѣсь будетъ данное число 8, подобно тому, какъ въ первомъ случаѣ за такой результатъ принималось данное число 3.

Равенство $x.3=15$ или однозначущее $x+x+x=15$ опредѣляетъ дѣйствіе дѣленіе на части, въ которомъ искомое x есть часть

числа 15-ти. Это понятіе о части числа развивается дальше въ понятіе о долѣ единицы и о совокупности долей, т.-е. въ послѣднемъ случаѣ о результатѣ счета долей. На такомъ опредѣленіи дроби строятъ обыкновенно всю теорію дробей. Но, извѣстно, что уже по отношенію къ цѣлымъ многозначнымъ числамъ упомянутое первичное значеніе дѣленія, на части, вполнѣ поглощается его вторымъ значеніемъ, дѣленія по содержанію, или, лучше сказать, другимъ дѣйствіемъ. Примѣненіе свойства перемѣстительности умноженія приводитъ въ нашемъ примѣрѣ къ равенству $3.x=15$ или $3+3+\cdots+3=15$, которое опредѣляетъ новое дѣйствіе—кратное сравненіе, при чемъ искомое x есть результатъ сравненія чиселъ или есть отношеніе чиселъ. Это искомое опредѣляется пробными умноженіями, имѣющими цѣлью составить множимое или число меньшее, ближайшее къ множимому. Мы знаемъ, что, приступая къ выводу правила дѣленія многозначнаго числа, не говорятъ уже о дѣленіи на части, а разсматриваютъ содержаніе дѣлителя въ дѣлимомъ, т.-е. производятъ кратное сравненіе.

О томъ, что всякая дробь выражаетъ собою отношеніе чиселъ, почти не упоминаютъ въ современныхъ курсахъ ариѳметики, а тѣмъ болѣе не выясняютъ того, что такое опредѣленіе дроби важнѣе перваго. Только уже, продѣлавъ съ учениками массу задачъ при недостаточномъ выясненіи понятій и при вытекающей изъ этого искусственности пріемовъ рѣшенія, указываютъ имъ въ спеціальныхъ правилахъ общія понятія и способы, строя за то здѣсь совершенно избыточную, совершенно лишнюю теорію отношеній и пропорцій. Ариѳметикѣ нужны лишь понятія объ отношеніи и пропорціи, но нужны они не въ концѣ ученія, а въ началѣ его.

Свойства кратныхъ измѣненій произведенія и частнаго уже примѣняютъ опредѣленіе прямого и обратнаго отношеній, а вмѣстѣ съ тѣмъ устанавливаютъ понятіе о пропорціональности прямой и обратной. Произведеніе и каждый изъ производителей измѣняются кратно въ прямомъ отношеніи. Частное измѣняется кратно въ прямомъ отношеніи съ дѣлимымъ и въ обратномъ съ дѣлителемъ. Постоянно примѣняется здѣсь не иное дѣйствіе, какъ кратное сравненіе.

Простѣйшій синтетическій способъ ариѳметики есть способъ приведенія къ единицѣ. 35 работниковъ зарабатываютъ въ нѣкоторое время 140 рублей; узнать (по прямой пропорціональности), сколько рублей заработаютъ въ то же время 50 работниковъ?

Или, 15 лошадей можно прокормить запасомъ сѣна 20 дней: узнать (по обратной пропорціональности), на сколько дней хватитъ того же запаса на 25 лошадей. И простая, и сложная пропорціональность налицо въ самыхъ началахъ ариѳметики.

Простѣйшій аналитическій способъ ариѳметики я назвалъ способомъ провѣряемаго допущенія. Нѣкто, уплачивая 133 рубля, давалъ одни десятирублевые билеты, а получилъ на сдачу столько же трехрублевыхъ. Если бы онъ далъ и получилъ по одному билету, то уплатилъ бы 10 руб.—3 руб.=7 руб., а такъ какъ уплачено больше въ отношеніи 133 руб.: 7 руб.=19, то было выдано обоюдно по 19 билетовъ. Или, на фабрикѣ работаютъ 30 мужчинъ и 40 женщинъ, послѣднія за половинную плату, а въ мѣсяцъ всѣ мужчины получаютъ больше всѣхъ женщинъ на 140 руб.. Если бы каждая женщина получала въ мѣсяцъ по 1 руб., а, значитъ, мужчина по 2 руб., то мужчины получили бы больше на 2 руб.. 30—40 руб.=20 руб., а такъ какъ они получаютъ больше въ отношеніи 140 руб.: 20 руб.=7, то, значитъ, каждая женщина получаетъ въ мѣсяцъ 7 руб., а каждый мужчина 14 рублей. Здѣсь примѣняются и разностныя, и кратныя сравненія.

Самыя выраженія словесныя—больше или меньше въ такомъ-то отношеніи кажутся въ элементарныхъ задачахъ необычными. Полагаю, что я впервые ввелъ ихъ съ самыхъ элементовъ ариѳметики. Нужно было не только оформливать нормальные способы рѣшенія задачъ, но и вырабатывать нормальный, научный языкъ. Но объ этомъ мы поговоримъ подробно ниже, а теперь вернемся еще къ обычному опредѣленію ариѳметическаго числа.

Авторы руководствъ по ариѳметикѣ, опредѣляя число, какъ результатъ счета или какъ собраніе единицъ и долей единицы, раздѣляютъ числа на отвлеченныя, предметныя и именованныя. Согласно даваемымъ ими опредѣленіямъ, и пять есть число, и пять фунтовъ—число, и пять грушъ—число. Разумѣется, ученикамъ не разрѣшается дѣлать выводъ, что число можно поднять, или съѣсть, или продать. Но хаосъ понятій все же имѣетъ свои послѣдствія.

Дѣлая уступку условной неправильности обычной математической рѣчи, я въ своихъ „Основаніяхъ“ принужденъ былъ говорить такъ: „Выраженія величинъ посредствомъ чиселъ, показывающихъ отношеніе, и единицъ, служащихъ для измѣренія, принято называть именованными числами. Напр., говорятъ, что пять верстъ, два часа, десять фунтовъ суть именованныя числа. Но именованныя числа

не суть тѣ, которыя разсматриваются въ математикѣ. Въ основѣ математики лежитъ понятіе о числѣ отвлеченномъ. Это понятіе объ отвлеченномъ числѣ получается тогда, когда при сравненіи величинъ мы отвлекаемся отъ представленія о родѣ этихъ величинъ и разсматриваемъ только ихъ отношеніе".

Тотъ же вышеупомянутый мой критикъ, преподаватель г. П., говоритъ по этому поводу въ своей статьѣ: [Но, спрашивается, какъ же мы получимъ понятіе о числѣ, разсматривая отношеніе величинъ? Почему отношеніе данныхъ величинъ даетъ намъ понятіе о данномъ числѣ, а не о какомъ-нибудь иномъ? На какомъ основаніи отношеніе вѣса, равнаго пуду, къ вѣсу, равному 10 фунтамъ, мы называемъ именно числомъ 4, а не числомъ 5 или вообще не какимъ-нибудь другимъ числомъ?]

Какъ видно изъ дальнѣйшихъ разсужденій автора, цѣль предыдущихъ, своеобразно формулированныхъ, вопросовъ—привести читателя къ заключенію, что отвлеченному числу не слѣдуетъ приписывать особый способъ происхожденія, т.-е. что это число, какъ и предметное, получается въ результатѣ счета. Разумѣется, говоря такъ, авторъ забылъ о несоизмѣримыхъ числахъ, которыя никакимъ конечнымъ множествомъ, доступнымъ счету, не могутъ быть выражены. Но, и не доходя до такихъ чиселъ, мысль критика о тождествѣ двухъ понятій о числѣ должна была бы получить существенную препону.

Въ теоріи дробей можно двояко опредѣлять основное понятіе о дроби: По одному опредѣленію, дробь есть совокупность долей или результатъ счета долей. По другому—дробь есть частное отъ дѣленія числителя на знаменателя, или она выражаетъ кратное отношеніе перваго изъ этихъ чиселъ къ другому. Тождество двухъ указанныхъ представленій о дроби отнюдь не считается очевиднымъ, а подтверждается разсужденіемъ, имѣющимъ всѣ признаки аргументальнаго доказательства.

Впрочемъ, г. П. договаривается до того, что устраняетъ различіе между цѣлыми и дробными числами: [Первымъ послѣдствіемъ, говоритъ онъ, неправильно признаваемаго различія между счетомъ и сравненіемъ является установленіе неправильнаго различія между числами цѣлыми и дробными. Дѣйствительно, всякое цѣлое число можно представить дробнымъ, напримѣръ: пять фунтовъ равны пяти сороковымъ частямъ пуда; три десятка равны тремъ десятымъ частямъ сотни].

Можно, конечно, замѣтить, что выраженіе „пять фунтовъ“ не обозначаетъ числа, а указываетъ вѣсъ, т.-е. величину конкретную. Въ указаніи этого вѣса число пять показываетъ единственное и вполнѣ опредѣленное отношеніе даннаго вѣса къ единицѣ—фунту; такое отношеніе выражается цѣлымъ числомъ, именно пятью, и не можетъ быть выражено никакимъ инымъ числомъ. Въ другомъ случаѣ величина „пять сороковыхъ пуда“ есть также вѣсъ, и эта конкретная величина равна вышеразсмотрѣнной. Но число пять сороковыхъ указываетъ на то, что въ нашемъ умозаключеніи мы сравниваемъ данную величину съ иной, чѣмъ прежде, единицей—пудомъ, мы находимъ, поэтому, иное отношеніе, и это-то новое отношеніе выражаемъ совсѣмъ инымъ, чѣмъ прежде, числомъ, не „пять“, а „пять сороковыхъ“.

Не знаю, подъ вліяніемъ ли моей старой статьи о двойственности опредѣленія числа или, вѣрнѣе, самостоятельно, г. К., составитель самаго распространеннаго у насъ руководства ариѳметики, кстати сказать, нерѣдко заимствующій у меня безъ указанія пріоритета, различилъ также двойственность въ указанномъ понятіи. Напечатанный мелкимъ шрифтомъ, подъ заглавіемъ „Двойное опредѣленіе числа“, § 100 двадцать четвертаго изданія его книги содержитъ слѣдующее теоретическое разъясненіе: [Въ началѣ этого учебника число было опредѣлено какъ с о б р а н і е е д и н и ц ъ (§ 1).—Теперь числу дано другое опредѣленіе, а именно: число есть р е з у л ь т а т ъ и з м ѣ р е н і я. Замѣтимъ, что первое опредѣленіе представляетъ собою частный случай второго.... Но нельзя сказать то же о второмъ опредѣленіи: не всякій результатъ измѣренія есть число въ смыслѣ собранія, потому что часто случается, что въ результатѣ измѣренія получается не одно число, а совокупность многихъ чиселъ].

Говорится это въ статьѣ о цѣлыхъ именованныхъ числахъ. Сказанное можно было бы еще понять, если бы объяснялось различіе между предметными числами и именованными, что однако, къ области ариѳметики не относится, потому что не дѣло науки о счисленіи различать, напр., 5 фунтовъ отъ 5 грушъ или 12 верстъ отъ 12 рублей. Но изъ заключительнаго разъясненія автора мы въ правѣ вывести курьезное указаніе, что, когда результатъ измѣренія выраженъ однимъ числомъ, напр., 326 дюймовъ, то это число можно еще разсматривать по первому опредѣленію, какъ собраніе единицъ, а если то же число дано въ формѣ 3 сажени 6 футовъ

2 дюйма, то оно уже не будетъ собраніемъ единицъ, и тогда окажется примѣнимымъ лишь второе опредѣленіе числа. На томъ же основаніи, число 275 соотвѣтствуетъ первому опредѣленію, а, будучи измѣрено сотнями, десятками и единицами въ видѣ 2 сотенъ 7 десятковъ 5 единицъ, подлежитъ уже второму опредѣленію. Понятно, что не о такомъ различеніи говорили мы выше. Но того, что намъ нужно, нельзя найти въ упомянутой книгѣ.

Впервые въ 20-мъ изданіи руководства, г. К. помѣстилъ § 143, озаглавленный „Происхожденіе дробныхъ чиселъ отъ дѣленія цѣлаго числа на равныя части“, что могло бы оказаться началомъ полезныхъ разъясненій. Самъ онъ говоритъ въ предисловіи, что [этимъ, конечно, достигается болѣе полное уясненіе значенія дробнаго числа]. Однако, для этой важной цѣли разсмотрѣны лишь два примѣра: какъ раздѣлить 5 яблокъ между 8 учениками поровну и какъ уменьшить число 28 въ 5 разъ. Да, притомъ, сущность вывода отнесена не къ дробнымъ числамъ, какъ, по крайней мѣрѣ, слѣдовало ожидать, а къ цѣлымъ, потому что конечный выводъ параграфа формулированъ такъ: [чтобы уменьшить цѣлое число въ нѣсколько разъ, достаточно взять это число числителемъ дроби, а знаменателемъ написать другое число, показывающее, во сколько разъ уменьшается цѣлое число].

О значеніи дроби, какъ отношенія, т.-е. о томъ, что составляетъ сущность для рѣшенія практическихъ задачъ на дроби, не говорится во всемъ курсѣ дробей. Понятіе объ отношеніи даже тщательно устраняется. Напр., объясняя то, что цѣлое число 5 можно представить въ видѣ дроби $\frac{5}{1}$, авторъ, вообще не стѣсняющійся въ нагроможденіи условій, говоритъ такъ: [Чтобы придать смыслъ такимъ выраженіямъ, условливаются, что раздѣлить единицу на одну равную часть, значитъ оставить единицу безъ измѣненія]. Разумѣется, было бы проще объяснить равенство $5=\frac{5}{1}$ тѣмъ, что единица содержится въ числѣ 5 ровно 5 разъ. На самое важное дѣйствіе ариѳметики—дѣленіе по содержанію или кратное сравненіе совсѣмъ не разсматривается въ модномъ учебникѣ, хотя къ помощи его иногда прибѣгаютъ, когда никакія условія не могутъ помочь.

Не затрогивая понятія объ отношеніи ни въ теоріи цѣлыхъ чиселъ, ни въ теоріи дробей, и тѣмъ болѣе не развивая это понятіе въ задачахъ на оба отдѣла, авторы учебниковъ ариѳметики, однако, три раза разсматриваютъ свойства отношенія. Первый разъ это

дѣлается въ статьѣ объ измѣненіи частнаго. Потомъ, не разсматривая дробь какъ частное и подавно не подчиняя это частное прежнимъ законамъ дѣйствій, особо толкуютъ о кратномъ измѣненіи дроби. Наконецъ, строятъ подробную теорію отношеній, совершенно, какъ уже упомянуто, лишнюю, потому что все, что излагается въ этой теоріи, уже было выведено и очень просто вытекаетъ изъ опредѣленія дѣленія, т.-е. изъ самыхъ началъ курса.

Въ моемъ руководствѣ ариѳметики я разсматриваю параллельно оба опредѣленія дроби, какъ совокупности долей и какъ частнаго. Согласовавъ эти опредѣленія строгимъ доказательствомъ, я также строго, хотя и просто, распространяю на дробныя числа основные законы дѣйствій. Важная теорія кратныхъ измѣненій дроби выводится даже двояко: изъ теоріи измѣненій произведенія, по первому опредѣленію дроби, и изъ измѣненій частнаго, по второму. Все ученіе объ отношеніи уже включено въ теорію дробей, т.-е. туда, гдѣ задачи съ самаго начала требуютъ этого, какъ требуютъ и двухъ важнѣйшихъ способовъ рѣшенія, которые, вслѣдствіе систематической подготовки къ нимъ, могутъ быть примѣняемы въ слѣдующей кратчайшей формѣ:

Способъ пропорціональнаго измѣненія. Задача 1. Изъ куска матеріи, длиною въ 45 аршинъ и шириною въ $2\frac{1}{4}$ аршина выходитъ 25 платьевъ. Какой длины долженъ быть кусокъ матеріи, шириною въ $1\frac{1}{2}$ аршина, чтобы изъ него вышло 10 платьевъ? —Второе число платьевъ меньше перваго въ отношеніи $10:25=\frac{2}{5}$. Если бы ширина матеріи была прежняя, то длина второго куска оказалась бы меньшей въ томъ же отношеніи $\frac{2}{5}$. Но вторая ширина меньше первой въ отношеніи $1\frac{1}{2}:2\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$, а при уменьшеніи ширины длина ея должна обратно увеличиться въ отношеніи $\frac{3}{2}$. Поэтому, длина второго куска будетъ 45 арш.. $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}=27$ аршинъ.

Задача 2. Два купца внесли для общей торговли неравные капиталы и выручили въ нѣкоторое время 413 рублей прибыли. Какъ нужно раздѣлить эту прибыль, если извѣстно, что $\frac{3}{5}$ капитала перваго составляютъ столько же, сколько $\frac{7}{8}$ капитала второго?

—Если $\frac{3}{5}$ капитала перваго составляютъ $\frac{7}{8}$ капитала второго, то весь капиталъ перваго составитъ больше въ обратномъ отношенiи $\frac{5}{3}$, т.-е. составитъ $\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{3}$ или $\frac{35}{24}$ капитала второго. Общiй же капиталъ будетъ больше въ отношенiи $1\frac{35}{24}$ или составитъ $\frac{59}{24}$ капитала второго. Если на $\frac{59}{24}$ капитала второго получено прибыли 413 рублей, то на одинъ капиталъ второго получится меньше въ обратномъ отношенiи $\frac{24}{59}$, т.-е. получится 413 руб.. $\frac{24}{59}=168$ руб.. Первый же получитъ остальную прибыль 413 руб.—168 руб.=245 рублей.

Способъ произвольнаго выбора единицы. Задача 1. Путешественникъ долженъ пройти нѣкоторое разстоянiе. Пройдя $\frac{4}{7}$ его, онъ разсчиталъ, что $\frac{3}{5}$ пройденнаго пути меньше всего оставшагося на 6 верстъ. Сколько верстъ ему нужно идти, сколько онъ прошелъ и сколько осталось?—Примемъ весь путь за единицу. Тогда пройденный путь выразится числомъ $\frac{4}{7}$, а указанная часть его числомъ $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{35}$. При той же выбранной единицѣ, оставшiйся путь представится числомъ $1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$, а разность оставшагося пути и указанной части пройденнаго числомъ $\frac{3}{7}-\frac{12}{35}=\frac{3}{35}$. Но, при данной въ задачѣ единицѣ, которая равна верстѣ, эта разность представлена числомъ 6. Поэтому, выбранная нами единица оказалась больше первоначально данной въ отношенiи $6:\frac{3}{35}=70$. Значитъ, весь путь равенъ 70 верстамъ. Послѣ этого найдемъ пройденный путь 70 в.. $\frac{4}{7}=40$ верстъ и оставшiйся 70 в.—40 в.= =30 верстъ.

Задача 2. Часть $\frac{19}{165}$ отъ суммы вѣсовъ трехъ грузовъ меньше вѣса перваго груза на 108 пудовъ. Первый грузъ вдвое меньше суммы двухъ остальныхъ, а вѣсъ третьяго составляетъ $\frac{5}{6}$ вѣса второго. Сколько вѣситъ каждый грузъ?—Примемъ вѣсъ второго груза за единицу и выразимъ всѣ упоминаемыя въ задачѣ числа

по системѣ такихъ новыхъ единицъ. Если вѣсъ второго груза есть единица, то вѣсъ третьяго равенъ дроби $\frac{5}{6}$, сумма вѣсовъ второго и третьяго равна $1+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$, вѣсъ перваго $\frac{11}{6}:2=\frac{11}{12}$, сумма вѣсовъ всѣхъ грузовъ есть $\frac{11}{12}+\frac{11}{6}=\frac{11}{4}$, указанная въ задачѣ часть этой суммы есть $\frac{11}{4}\cdot\frac{19}{165}=\frac{19}{60}$ и, наконецъ, указанная разность $\frac{11}{12}-\frac{19}{60}=\frac{3}{5}$. Но, такъ какъ по прежней системѣ единицъ, въ которой единицей былъ пудъ, эта часть выражалась числомъ 108, то принятая нами единица больше пуда въ отношеніи $108:\frac{3}{5}=180$, т.-е. вѣсъ второго груза есть 180 пудовъ, а потому вѣсъ перваго 180 п.. $\frac{11}{12}$=165 пудовъ и вѣсъ третьяго 180 п.. $\frac{5}{6}$= 150 пудовъ.

Вышеупомянутый авторъ, г. К., слѣдуя утвержденнымъ у насъ программамъ, трактуетъ въ концѣ книги теорію отношеній и пропорцій со множествомъ подробностей. Этотъ отдѣлъ ариѳметики вообще считается до сихъ поръ чуть не важнѣйшимъ. На самомъ дѣлѣ онъ составляетъ никуда не годный балластъ. Нѣтъ ни одной ариѳметической задачи, для рѣшенія которой была бы нужна теорія пропорцій, а не одно только элементарное понятіе о пропорціональности, возникающее естественно съ самыхъ началъ ученія.

Г. К. опредѣляетъ понятіе объ отношеніи такъ: [Отношеніемъ одного значенія величины къ другому значенію той же величины называется отвлеченное число, на которое надо умножить второе значеніе, чтобы получить первое]. Подразумѣвается, конечно, безконечное разнообразіе паръ значеній разсматриваемой величины, но формулировкой опредѣленія къ этому пріурочено представленіе единой въ данномъ разсмотрѣніи величины, общей для безконечно сложнаго комплекса ея паръ значеній. Въ задачахъ мы вовсе не наталкиваемся на мысль о томъ, что всѣ упоминаемыя тамъ, напр., суммы денегъ суть значенія одной величины—капитала, или всѣ длины—значенія одной величины протяженія. Теперь можемъ расширить горизонтъ мышленія, напр., счетомъ величинъ—капитала, протяженія, объема, вѣса, времени и т. под., для опредѣленія того, много ли величинъ въ ариѳметикѣ. По другому пункту формулировки наше вниманіе сосредоточивается на операціи умноженія. Можно призадуматься надъ эффектомъ этого дѣйствія, производя

которое, мы получаемъ вмѣсто малаго капитала большой, вмѣсто длиннаго пути сокращенный и т. под.. Но, разумѣется, нельзя додуматься до того, чтобы указанное умноженіе замѣнить дѣленіемъ, чтобы полученіе второго значенія замѣнить сравненіемъ равноправныхъ обоихъ, т.-е. вообще понять дѣло по его существу.

Пропорцію авторъ опредѣляетъ, какъ равенство двухъ отношеній. Для поясненія даетъ примѣръ 8 пуд.: 4 пуд.=20 арш.: 10 арш.. Затѣмъ, вспомнивъ, вѣроятно, что скоро придется говорить о произведеніяхъ среднихъ и крайнихъ членовъ, и натолкнувшись въ выбранномъ примѣрѣ на единицы—пудоаршины, для счета каковыхъ ни изученныя предметныя числа, ни обычныя именованныя не годны, а подходящія конкретныя еще въ ариѳметику не введены, авторъ, какъ обыкновенно, обходитъ затрудненіе полюбовнымъ соглашеніемъ съ учениками. [„Будемъ предполагать“, говоритъ онъ, „что всѣ члены пропорціи отвлеченныя числа“]. Вотъ, наконецъ, то мѣсто ученія, гдѣ конкретныя числа помѣшали всерьезъ. Скоро, однако, переходя къ традиціоннымъ правиламъ, г. К. сознаетъ и то, что сами пропорціи только мѣшаютъ дѣлу. Упомянувъ одну изъ нихъ въ простомъ тройномъ правилѣ и объяснивъ сложное тройное приведеніемъ къ единицѣ, что пригодно лишь въ самыхъ простыхъ примѣрахъ, онъ въ дальнѣйшемъ утилизируетъ отчасти мои пріемы рѣшенія задачъ, не указавъ въ предисловіи источника заимствованія, впрочемъ, какъ я думаю, единственнаго и безспорнаго.

Нельзя не обращать серьезнаго вниманія на крупные дефекты педагогическаго дѣла. Они имѣютъ слишкомъ общее и широкое значеніе. Нормальный умъ долженъ всегда мыслить въ соотвѣтствіи съ естественными законами фактовъ. Если мысль изучающихъ самими руководителями отстраняется отъ нормальнаго пути, то получаются тяжелыя слѣдствія. На мѣсто здравой логики становится безсознательная мнемоника. Не понимая фактовъ науки, ученики принуждены зубрить. Отсюда—непріязнь къ дѣлу, вмѣсто интереса къ нему. Отсюда и общее ослабленіе, какъ ума, такъ и воли. Полагаю, что важные интересы школы требуютъ того, чтобы узаконеніе обязательныхъ программъ и соотвѣтствующихъ имъ учебниковъ производилось комиссіями лицъ, достаточно компетентныхъ въ дѣлѣ и лично безпристрастныхъ. На сколько это требованіе соотвѣтствуетъ у насъ дѣйствительности, будетъ видно изъ дальнѣйшаго моего изложенія.

Руководство ариѳметики.

Въ прежней рецензіи Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. (Журналъ Министерства, мартъ 1889 года) о первомъ изданіи моего руководства ариѳметики было, между прочимъ, сказано:.... „книга эта имѣетъ много замѣчательныхъ достоинствъ.... если бы изъ нея исключить все, не относящееся къ элементарному курсу, то она могла бы служить руководствомъ для среднихъ учебныхъ заведеній.... изложеніе системы счисленія и теоріи четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій можно, за немногими исключеніями, признать образцовымъ, и по глубинѣ мысли, и по простотѣ метода.... за исключеніемъ тѣхъ мѣстъ, гдѣ авторъ вдается въ методику и касается происхожденія понятій, изложеніе доступно, по своей простотѣ и ясности, даже ученикамъ младшихъ классовъ.... разсматриваемая книга, несмотря на нѣкоторые недостатки, заслуживаетъ особаго вниманія учителей математики, и, какъ можно надѣяться, останется не безъ вліянія на улучшеніе обычныхъ методовъ преподаванія этой науки“.

Въ частной рецензіи того же перваго изданія книги (Журналъ Русская Мысль, октябрь 1888 года) было сказано:.... „книга представляетъ собою крупное и довольно своеобразное явленіе въ нашей педагогической литературѣ.... Множество опредѣленій, теоремъ и правилъ сведены въ стройную систему, которая по справедливости должна считаться послѣднимъ словомъ науки.... въ отдѣлѣ о цѣлыхъ числахъ курсъ едва ли имѣетъ соперниковъ не только въ русской, но и въ иностранной литературѣ.... руководство ариѳметики представляетъ въ высшей степени цѣнный вкладъ въ математическую литературу и можетъ быть вполнѣ рекомендовано не только учителямъ, но и ученикамъ старшаго возраста и вообще всѣмъ, интересующимся математикой“.

Упомянутое руководство такъ и назначалось авторомъ для преподавателей и учениковъ старшаго возраста. Вслѣдствіе новизны многихъ пріемовъ теоретическаго разсужденія и способовъ практическаго рѣшенія задачъ, изложеніе въ первомъ изданіи было обставлено подробными разъясненіями и отчасти методическими указаніями. Во второмъ изданіи весь этотъ дополнительный матеріалъ книги былъ сполна устраненъ. Изложенію приданъ характеръ догматическаго, вполнѣ опредѣленнаго, обработаннаго учеб-

ника. Въ третьемъ и четвертомъ изданіяхъ вводились только незначительныя упрощенія. Такимъ образомъ, существенныя требованія прежней критики были выполнены, а для новыхъ отзывовъ книга до настоящаго года никуда не была представлена. Можно было думать, что за ней сохраняются и даже окрѣпли—одобреніе въ качествѣ пособія для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, мужскихъ и женскихъ, и рекомендація для учительскихъ библіотекъ.

Такъ какъ новыя правила Министерства Народнаго Просвѣщенія требуютъ офиціальнаго пересмотра учебныхъ книгъ при каждомъ новомъ ихъ изданіи, то четвертое изданіе руководства было представлено для такого пересмотра съ прошеніемъ объ одобреніи книги для учительскихъ и ученическихъ библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній и о допущеніи ея къ преподаванію на педагогическихъ курсахъ, въ учительскихъ институтахъ и семинаріяхъ. Ученый Комитетъ Министерства постановилъ: „разсмотрѣнное изданіе признать не подлежащимъ допущенію въ качествѣ учебнаго руководства для учительскихъ институтовъ и семинарій, равно какъ непригоднымъ для ученическихъ библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній; вопросъ же о допущеніи изданія на педагогическіе курсы и въ фундаментальныя библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній оставить безъ особаго разсмотрѣнія“. Обычнаго въ подобныхъ случаяхъ обѣщанія напечатать мотивирующую постановленіе рецензію книги на этотъ разъ не дано. Можно сказать, что книга уволена по 3-му пункту отъ дѣла служенія отечественному образованію. Съ прогрессомъ офиціальной науки взглядъ на мою книгу въ корнѣ измѣнился. То, что двадцать четыре года назадъ признавалось образцовымъ по глубинѣ мысли и простотѣ метода, доступнымъ почти для младшихъ учениковъ и особо полезнымъ для учителей, признается теперь недопустимымъ для какого либо ознакомленія тѣхъ и другихъ съ подобнымъ вреднымъ въ дѣлѣ просвѣщенія матеріаломъ.

И въ самомъ дѣлѣ, устарѣвшее, не успѣвъ разцвѣсть, мое ариѳметическое ученіе не можетъ быть согласовано съ новѣйшими на этотъ счетъ авторитетными указаніями. Повидимому, наиболѣе авторитетнымъ изъ новѣйшихъ руководителей математическаго образованія въ Россіи считается членъ Уч. Ком., профессоръ К., которому за послѣдніе годы принадлежитъ большинство утвержденныхъ высшей властью офиціальныхъ рецензій книгъ. Мнѣ

ужe давно было предложено исправить нѣкоторыя мои книги по указаніямъ этого ученаго, нашедшаго въ представленныхъ книгахъ массу недостатковъ. Къ сожалѣнію, разногласіе оказывается непримиримымъ, какъ можно судить, во-первыхъ, по слѣдующимъ простѣйшимъ примѣрамъ изъ области самыхъ основныхъ числовыхъ понятій.

Касаясь этой области на первыхъ страницахъ своего курса высшаго математическаго анализа, профессоръ К. говоритъ, между прочимъ: [Вычитаніе, опредѣляемое въ ариѳметикѣ, становится невозможнымъ, во-первыхъ, когда вычитаемое равно уменьшаемому...,]. Для поясненія сказаннаго онъ прибавляетъ затѣмъ: [Случай, когда вычитаемое равно уменьшаемому, соотвѣтствуетъ отсутствію той величины, которую мы должны были опредѣлить посредствомъ вычитанія].

На мой взглядъ, въ этихъ двухъ утвержденіяхъ содержатся двѣ логическихъ ошибки, которыя становятся наглядными при разборѣ утвержденій на практическомъ примѣрѣ. Во-первыхъ, если вычитаніе при сказанныхъ условіяхъ невозможно, то всякое лицо, забывшее свой кошелекъ дома и имѣющее въ карманѣ лишь сумму, оплачивающую стоимость проѣзда въ вагонѣ трамвая одной станціи, не въ правѣ сѣсть въ вагонъ, а сѣвши—обязано немедленно сойти на пѣшеходный путь. Во-вторыхъ, тотъ же примѣръ показываетъ, что цѣль вычитанія не заключается въ опредѣленіи остатка, иначе выходило бы, что и кондукторъ трамвая долженъ, по выдачѣ проѣздного билета, знать о каждомъ пассажирѣ, сколько у таковога осталось денегъ въ карманѣ. Въ моемъ руководствѣ ариѳметики объясняется, что значеніе вычитанія, какъ и всякаго ариѳметическаго дѣйствія, опредѣляется активнымъ числомъ этого дѣйствія, т.-е. въ данномъ случаѣ—вычитаемымъ. Вычесть 5 значитъ отсчитать 5 единицъ, а отъ чего отсчитать или къ какому результату придемъ,—это къ значенію самаго дѣйствія не относится.

Въ сентябрьской за 1906-й годъ книжкѣ журнала Мин. Нар. Просв., въ письмѣ къ редактору, профессоръ К., нападая на меня за приверженность мою къ извѣстному опредѣленію умноженія— „умножить—значитъ составить изъ множимаго новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы“, говоритъ, между прочимъ: [мое возраженіе направлено противъ словъ „какъ множитель составленъ изъ единицы“, которыя являются на столько неопредѣленными (внѣ области раціональныхъ чиселъ), что даютъ

разные результаты, смотря потому, какъ ихъ понимать]. Для разъясненія сказаннаго, профессоръ говоритъ: [напримѣръ, если надо умножить 2 на $\sqrt{3}$, гдѣ множитель составленъ такъ: единица повторена слагаемымъ три раза и изъ результата извлеченъ квадратный корень, то по указанному опредѣленію нужно будетъ множимое 2 повторить три раза слагаемымъ и изъ результата 6 извлечь квадратный корень. Это и дало бы невѣрный результатъ $\sqrt{6}$ вмѣсто правильнаго $2\sqrt{3}$ или $\sqrt{12}$].

По моему мнѣнію, въ указанномъ краткомъ разсужденіи запечатлѣны два факта незнакомства съ литературой предмета и четыре ошибки. Что касается перваго дефекта разсужденія, то можно было знать даже и въ нашей отечественной литературѣ пріоритетъ подобнаго возраженія противъ опредѣленія, притомъ именно въ области раціональныхъ чиселъ. Напр., разсматривая умноженіе 2 на $\frac{3}{5}$, говорили, что $\frac{3}{5}$ составлено изъ единицы по формѣ $\frac{1+1+1}{1+1+1+1+1}$, а потому опредѣленіе умноженія даетъ результатъ $\frac{2+2+2}{2+2+2+2+2}$, т.-е. $\frac{6}{10}$, вмѣсто истиннаго $\frac{6}{5}$.—Затѣмъ, профессоръ едва ли бы надумалъ возражать, если бы зналъ, что разсматриваемое опредѣленіе дано знаменитымъ ученымъ Коши, авторитетъ котораго, несомнѣнно, признается и нашими офиціальными критиками.

Первая ошибка профессора К. въ томъ, что онъ, не будучи знакомъ съ прецендентами своего разсужденія, отрицаетъ примѣнимость дѣлаемаго имъ возраженія въ области раціональныхъ чиселъ, гдѣ оно, однако, уже примѣнено и притомъ въ совершенно аналогичной формѣ.—Вторая ошибка въ невѣрномъ развитіи собственной мысли возражателя: Вѣдь, $\sqrt{3}$ только по привычкѣ пишутъ безъ показателя, который есть 2 и долженъ быть также составленъ изъ единицы. Поэтому, составленіе множителя изъ единицы должно быть выполнено по формѣ $\sqrt[1+1]{1+1+1}$, и, значитъ, произведеніе должно быть не $\sqrt{6}$, а $\sqrt[2+2]{2+2+2}$, т.-е. $\sqrt[4]{6}$, что для подрыва авторитета Коши еще важнѣе.

Третья ошибка, какъ самого профессора К., такъ и его предшественниковъ, въ томъ, что они смѣшали каллиграфическую операцію выписыванія букета единицъ съ математической операцiей составленія изъ единицы дробнаго и ирраціональнаго числа. Для

составленія дроби $\frac{3}{5}$ нужно сначала раздѣлить единицу на пять частей, а затѣмъ сложить три такихъ части. Для составленія $\sqrt{3}$ нужно представить его совокупностью десятичныхъ долей единицы въ видѣ 1,7325.... При каллиграфическомъ, какъ сказано, выписываніи букета единицъ, какъ черту дроби, такъ и черту корня пишутъ одинаково прямолинейно, не придавая ей никакого объясненія. При математическомъ же составленіи чиселъ изъ единицы эти двѣ черты различаютъ и, какъ видимъ, очень существенно.—Четвертая ошибка въ смѣшеніи понятій объ обозначеніи числа и о самомъ числѣ. Результатъ разсмотрѣннаго по теоріи возражателя умноженія вовсе не есть $2\sqrt{3}$, какъ нельзя и въ другомъ примѣрѣ называть аналогичное выраженіе $2.\frac{3}{5}$ результатомъ умноженія. Это есть лишь неявное обозначеніе произведенія, притомъ даже въ заданной формѣ, а не въ окончательной. Истинный результатъ въ раціональномъ примѣрѣ обозначается въ видѣ $\frac{6}{5}$, въ ирраціональномъ онъ представится совокупностью десятичныхъ знаковъ 3,465.... Такимъ образомъ, въ этой частности, какъ и въ общей идеѣ возраженія, авторъ таковаго смѣшиваетъ число съ его условнымъ обозначеніемъ, а, слѣдовательно, вычисленіе съ письмомъ, т.-е. процессъ умозрительный съ конкретнымъ.

Понятно, что, при подкладкѣ такого образованія и развитія, самовластная и безконтрольная критика должна впадать въ коренное противорѣчіе съ явленіями иного порядка. Здѣсь не можетъ быть никакихъ пунктовъ соглашенія. Менѣе понятно то, что подобная критика поддерживается солидарно цѣлымъ, казалось бы авторитетнымъ, учрежденіемъ. Это уже приходится объяснять вліяніемъ традицій, престижа власти, но также, въ извѣстной степени, и однородностью среды.

Повидимому, Ученый Комитетъ ограничится устраненіемъ моего руководства ариѳметики, какъ я сказалъ выше, по 3-му пункту, безъ мотивирующихъ объясненій. Во всякомъ случаѣ, ожидая или не ожидая рецензіи, я самъ разберу кое-что въ этой книгѣ. Позволю себѣ напечатать теперь статью, которая назначалась къ свѣдѣнію г.г. преподавателей еще въ 1893-мъ году, при второмъ изданіи руководства ариѳметики, но была тогда оставлена въ ящикѣ письменнаго стола. На мой взглядъ, она до сихъ поръ сохранила вполнѣ свою свѣжесть.

Введеніе статьи.

Обращаю вниманіе г.г. преподавателей на то, что настоящимъ, уже вторымъ, изданіемъ моего руководства ариѳметики преслѣдуется и, смѣю думать, достигается новая, серьезная обработка, какъ научнаго строя современнаго ариѳметическаго ученія, такъ и системы преподаванія этого ученія. Чтобы доказать это, хотя отчасти, я вынужденъ предпринять въ самомъ сжатомъ видѣ разборъ современнаго изложенія ариѳметики по сравненію съ предлагаемымъ мною изложеніемъ. Считаю трудъ отрицательной характеристики упомянутаго матеріала значительно менѣе производительнымъ, чѣмъ тотъ положительный трудъ, который я безпрерывно вкладываю въ дѣло обработки всего основного курса математики, подготовляя рядъ сочиненій по элементарной и высшей математикѣ. Поэтому, да простятъ мнѣ читатели настоящей статьи то, что, выступая въ ней съ задачей разбора, по существу сложнаго, я отнесусь къ нему лишь наскоро, между дѣломъ, посвящая на выполненіе его лишь ничтожный срокъ. Итакъ, приступаю къ сжатому и бѣглому обзору тѣхъ недостатковъ, которые усматриваю въ современныхъ учебникахъ ариѳметики, какъ русскихъ, такъ и иностранныхъ. Систематизирую понятія въ той послѣдовательности, въ которой они развиваются въ моемъ сочиненіи, и для отчетливой отмѣтки деталей разсужденія, обозначаю эти детали краткими заглавными рубриками.

Величина.

Терминъ „величина“ употребляютъ одновременно для выраженія двухъ различныхъ понятій. Въ одномъ случаѣ относятъ этотъ терминъ къ самому объекту математическаго представленія, въ другомъ къ отдѣльному признаку этого объекта, правда—самому важному въ дѣлѣ математическаго разсмотрѣнія, но составляющему, все-таки, частность болѣе сложнаго понятія. Такимъ образомъ, говорятъ о данной величинѣ, самой по себѣ, и о величинѣ этой величины. Считаю необходимымъ отграничить понятіе объекта отъ его частнаго признака, и послѣдній называю размѣромъ величины. Нѣкоторые авторы стараются обходить отмѣченную двойственность установленіемъ термина „значеніе величины“, но это далеко не достигаетъ цѣли и ведетъ къ затемненію нѣкоторыхъ понятій. Пока, однако, оставимъ подробности.

Величину я опредѣляю, какъ свойство даннаго предмета или явленія, характеризуемое особыми, точно выдѣляющими это понятіе, признаками. Разумѣется, такое первичное понятіе не можетъ быть опредѣлено безъ ссылки на неопредѣлимую умственную категорію, но, если, даннымъ опредѣленіемъ, понятіе, все-таки, выдѣляется, какъ самостоятельное, то это уже можно считать достаточнымъ. Я говорю такъ: Величиною называется всякое свойство предмета или явленія, которое обладаетъ слѣдующими признаками: Разсматриваемое свойство можетъ или въ дѣйствительности измѣняться, или мы въ нашемъ воображеніи можемъ представить такое свойство измѣняющимся. Измѣненіе состоитъ въ томъ, что мы называемъ увеличеніемъ, или уменьшеніемъ. Такое измѣненіе можетъ быть отчетливо уяснено. Существованіе предмета есть его свойство, но оно неизмѣняемо. Форма предмета есть свойство, обладающее измѣняемостью, но это измѣненіе не состоитъ въ увеличеніи или уменьшеніи. Красота предмета можетъ быть больше или меньше, но такое различеніе отчетливому уясненію не подлежитъ. Значитъ, сказанное опредѣленіе понятія не допускаетъ смѣшенія его съ другими понятіями.

Однородныя величины.

Нельзя опредѣлять однородныя величины, какъ тѣ, которыя одинаковы по ихъ существеннымъ признакамъ. Такое опредѣленіе требовало бы, чтобы мы могли вполнѣ точно сравнивать и существенные, и второстепенные признаки различныхъ величинъ. Однако, на дѣлѣ, мы, хотя и отличаемъ притяженіе отъ вѣса, или капиталъ отъ продолжительности времени, но такое различеніе категорично, а не основано на точномъ сопоставленіи признаковъ. Другими словами, мы совсѣмъ не опредѣляемъ, да и не нуждаемся опредѣлять отличительные признаки различныхъ величинъ.—Нельзя также характеризовать однородныя величины, какъ такія, изъ которыхъ одна составляетъ часть другой. Помимо введенія здѣсь лишняго пока понятія о части, опредѣленіе непримѣнимо тогда, когда сравниваемыя величины совершенно одинаковы, т.-е. когда онѣ въ тѣснѣйшемъ смыслѣ слова однородны. Я говорю: Однородными величинами называются тѣ, которыя или совершенно одинаковы, или отличаются тѣмъ, что одна больше или меньше другой.

Размѣръ.

По моему, истинная философія основъ математики начала развиваться съ тѣхъ поръ, какъ была разработана геометрическая теорія комплексовъ или теорія направленныхъ прямыхъ, иначе векторовъ. Данныя этой теоріи, какъ нельзя лучше, разъясняютъ мельчайшія тонкости математическихъ понятій. Напр., всякій понимаетъ, что модуль или абсолютный размѣръ вектора нельзя смѣшивать съ самой величиной—векторомъ, который имѣетъ еще иной признакъ—направленіе, отмѣчаемое на прямой линіи знакомъ + или —, на плоскости угломъ отклоненія, въ пространствѣ двумя углами отклоненія. Позволю себѣ и въ дальнѣйшемъ ссылаться неоднократно на эту важнѣйшую въ философскомъ отношеніи математическую теорію.

Въ ариѳметикѣ, устанавливая опредѣленіе понятія о размѣрѣ, я говорю: Такъ, какъ однородныя величины мы все-таки отличаемъ одну отъ другой, то, значитъ, есть въ нихъ признакъ для такого различенія. Такой признакъ состоитъ въ томъ только, что одна величина можетъ быть больше или меньше другой. Это есть общій признакъ всѣхъ величинъ. Онъ называется размѣромъ. Размѣромъ величины называется тотъ признакъ ея, по которому мы отличаемъ одну величину отъ другой, ей однородной, но не тождественной съ нею. Напр., объемы двухъ предметовъ различаются по размѣру. Цѣнности вещей также различаются по размѣру.

Измѣреніе.

Терминъ „измѣреніе" всегда опредѣляется не точно. При измѣреніи сравниваются не самыя величины, а только ихъ размѣры. Напр., сравненіе двухъ направленныхъ прямыхъ на плоскости или въ пространствѣ не есть измѣреніе одной изъ этихъ прямыхъ другою. Обыкновенно, понятія объ измѣреніи и о математическомъ сравненіи величинъ смѣшиваютъ, какъ однозначащія, тогда какъ на самомъ дѣлѣ эти понятія глубоко различны, второе изъ нихъ гораздо шире перваго. Понимая измѣреніе, какъ сравненіе только по размѣру, я говорю: Измѣреніемъ величины называется отчетливое сравненіе размѣра данной величины съ размѣромъ другой, которая считается извѣстной.

Отношеніе.

Терминъ „отношеніе" часто употребляется въ математикѣ, притомъ въ различныхъ значеніяхъ, что, однако, можно устранить или,

по крайней мѣрѣ, сузить. Понятіе объ отношеніи обыкновенно смѣшиваютъ съ понятіемъ о числѣ, когда говорятъ, что „число есть отношеніе величинъ“. Это не вѣрно. Отношеніе величинъ существуетъ объективно, внѣ насъ, и лишь въ нашемъ сознаніи выражается числами, которыхъ условный, субъективный характеръ расширяется съ углубленіемъ нашихъ знаній. Напр., въ Декартсвой аналитической геометріи всѣ факты изслѣдуются съ помощью двоякаго рода дѣйствительныхъ количествъ, выражающихъ координаты точки, и тамъ мнимымъ количествамъ совершенно нѣтъ мѣста. Измѣняя же нашу личную манеру изслѣдованія, мы въ теоріи векторовъ реализуемъ мнимый комплексъ, какъ опредѣляющій положеніе точки, въ качествѣ единаго количества, и можемъ изслѣдовать всѣ тѣ же факты, встрѣчаясь лишь въ видѣ рѣдкаго исключенія съ дѣйствительными количествами. Приводя другой примѣръ, еще болѣе отчетливый, укажу на то, что отношеніе двухъ векторовъ пространства Гамильтонъ предложилъ выражать кватерніономъ. Можно, однако, то же отношеніе выражать количествомъ совершенно иной природы и иныхъ свойствъ, которое я называю терніономъ.

Имѣя въ виду, что понятіе о математическомъ отношеніи чрезвычайно глубоко и съ развитіемъ науки дѣлается все болѣе разносторонним, я въ ариѳметикѣ даю лишь первичное опредѣленіе этого понятія, относящееся къ сравненію размѣровъ, т.-е. къ измѣренію и говорю: Отношеніемъ двухъ величинъ называется то, что мы узнаемъ при измѣреніи одной величины посредствомъ другой.

Число.

Какъ ни странно, но нужно признать, что точнаго опредѣленія понятія о числѣ элементарная ариѳметика до сихъ поръ не имѣла. Въ самомъ дѣлѣ нельзя же допустить, что это опредѣленіе было дано, если даже въ серьезныхъ сочиненіяхъ числа раздѣлялись на отвлеченныя, предметныя и именованныя, если съ одинаковой авторитетностью учили въ школахъ, что и пять есть число, и пять грушъ—число, и пять верстъ—число, не говоря уже о числахъ, изучаемыхъ въ высшемъ анализѣ. Имѣя въ виду, что въ началахъ ариѳметики можетъ быть понято лишь первичное значеніе числа, я, однако нахожу возможнымъ формулировать общее опредѣленіе, годное для реальныхъ чиселъ во всемъ объемѣ современнаго математическаго ученія: Числомъ мы называемъ то, что выра-

жаетъ въ нашемъ умѣ уясненное нами отношеніе двухъ разсматриваемыхъ величинъ. Такимъ образомъ, число 3 выражаетъ для насъ, что въ одномъ размѣрѣ величины размѣръ другой содержится три раза, дробное число показываетъ подобное же содержаніе доли одного размѣра въ другомъ, число несоизмѣримое—содержаніе безконечно разнообразныхъ долей. Подъ такое опредѣленіе подходятъ и алгебраическія дѣйствительныя количества, и мнимые комплексы алгебры плоскости, и кватерніоны съ терніонами.

Раздѣленіе чиселъ.

Въ ариѳметикѣ, говоря о числахъ, касаются только цѣлыхъ и дробныхъ, не упоминая о несоизмѣримыхъ, которыя также всецѣло суть ариѳметическія числа, поскольку въ нихъ разсматриваются лишь абсолютныя значенія. Считаясь съ обычными у насъ программами, я нахожу нужнымъ, все-таки, хотя упомянуть о существованіи такихъ чиселъ, указывая на возможность полученія ихъ при измѣреніи величинъ.

Въ очерченномъ до сихъ поръ введеніи въ ариѳметику, я, какъ видитъ читатель, исхожу изъ общаго понятія о величинѣ. Это не значитъ, что ту же систему изложенія я рекомендую въ педагогическомъ отношеніи. Руководство назначено для преподавателей и учениковъ старшаго возраста, т.-е. имѣетъ характеръ повторительнаго курса. Задача его не въ пропедевтическомъ раскрытіи понятій, а въ ихъ концентраціи и широкомъ освѣщеніи. Въ начальныхъ учебникахъ слѣдуетъ, конечно, исходить изъ понятія о счетѣ и развивать идею числа постепенно. Здѣсь и самую сущность числа, какъ выразителя отношенія, нужно устанавливать исподволь.

Счетъ.

Понятіе о счетѣ обыкновенно разсматриваютъ, какъ неопредѣлимое, категорическое. Однако нѣтъ надобности такъ расширять сферу исходныхъ, не разложимыхъ, началъ науки. Мы сознаемъ отчетливо, что производство счета требуетъ отъ человѣческаго ума двухъ способностей — задержанія въ памяти составленной группы элементовъ и перехода къ новому элементу. Категоричны лишь понятія о единицѣ и о прибавленіи единицы. На этомъ основаніи я формулирую опредѣленіе: Счетъ есть дѣйствіе нашего ума, состоящее въ томъ, что при разсматриваніи какой либо совокупности предметовъ, мы не отмѣчаемъ въ памяти отдѣльные признаки этихъ предметовъ, а пред-

ставляемъ мысленно лишь сочетаніе предметовъ въ группы и переходъ отъ каждой составившейся группы къ новому предмету.

Аксіомы ариѳметики.

Опредѣляя цѣлое число, какъ результатъ счета, нужно имѣть въ виду, что этимъ опредѣленіемъ намѣчается первичный, единственный по формѣ составъ числа изъ единицъ, присчитанныхъ по одной въ опредѣленномъ порядкѣ. Иное, болѣе широкое представленіе о числѣ, какъ о совокупности единицъ, расположенныхъ въ произвольномъ порядкѣ и съ произвольными группировками ихъ, вытекаетъ уже не изъ опредѣленія, а изъ особой аксіомы: Число не измѣняется при всякомъ перемѣщеніи и измѣненіи группировки составляющихъ его единицъ. Эта аксіома охватываетъ все содержаніе ариѳметики, начиная съ ея первыхъ основъ до крайнихъ предѣловъ. Однако, ее или совсѣмъ не указываютъ, или по меньшей мѣрѣ не фиксируютъ на ней вниманіе учащихся. Такое пренебреженіе недопустимо ни въ научномъ, ни въ педагогическомъ отношеніи. Я понимаю, что, избѣгая въ элементарныхъ руководствахъ крайней утонченности разсужденій, можно еще не оттѣнять особо и притомъ въ началѣ курса другую аксіому: Одно число можно всегда замѣнять другимъ, ему равнымъ. Ее значеніе приходится и понимать раздѣльно по частямъ, какъ, напр., если одно число равно другому, то и другое равно первому, если два числа равны порознь третьему, то они равны между собою, и т. под., а сверхъ того разносторонность этого значенія оцѣнивается достаточно лишь въ отдаленіи отъ начала курса, въ обычной системѣ таковаго. Въ своемъ краткомъ сочиненіи „Основанія ариѳметики и алгебры“ я выставляю обѣ аксіомы въ самыхъ началахъ и почти параллельно, что затѣмъ и утилизирую въ каждомъ подходящемъ случаѣ. Но это сочиненіе не соотвѣтствуетъ цѣли элементарнаго преподаванія.

Система счисленія.

Счисленіе опредѣляютъ, какъ совокупность правилъ для составленія названій и обозначеній чиселъ, забывая о самомъ важномъ признакѣ понятія, именно, что счисленіе содержитъ правило для самаго составленія чиселъ посредствомъ выбираемой для данной цѣли группировки единицъ. Вѣдь, здѣсь и примѣняется впервые основная аксіома ариѳметики, о которой, какъ сказано выше, часто совсѣмъ не упоминаютъ. Систему словеснаго счисленія объ-

ясняютъ разными пріемами—и кратко, и очень подробно, но сущности правилъ его, все-таки, не формулируютъ, разбивая эти правила на смѣшанный рядъ отдѣльныхъ указаній. Главныхъ правилъ три—для единицъ, для разрядныхъ чиселъ и для смѣшанныхъ чиселъ, но, вѣдь, самый терминъ—разрядное число нигдѣ не употребляется. Между тѣмъ это понятіе и, значитъ, соотвѣтствующій терминъ необходимы не только при логическомъ анализѣ условій счисленія. Правила сложенія и вычитанія чиселъ также раздѣляются на три, обособленныя тѣмъ же раздѣленіемъ, частности.

Теорія дѣйствій.

Теорія дѣйствій часто излагается такъ, что въ изложеніи нѣтъ и слѣда научной послѣдовательности. Основная роль опредѣленія дѣйствія не выясняется, да обыкновенно и самый терминъ, выражающій это понятіе, отсутствуетъ въ цѣломъ курсѣ. Изъ теоремъ нѣкоторыя доказываются, другія, подобной же сложности, считаются не требующими доказательствъ. Правила смѣшиваются съ опредѣленіями, а еще чаще съ теоремами. Нерѣдко то, что логически слѣдуетъ, излагается раньше того, что логически должно предшествовать. Не вдаваясь пока въ подробности, которыя разовьемъ ниже, вспомнимъ, что были писатели, совершенно отрицавшіе ариѳметику, какъ науку.

Сложеніе.

Опредѣленіе прямого дѣйствія должно состоятъ въ указаніи процесса этого дѣйствія, а не свойства результата, какъ умѣстно въ обратномъ дѣйствіи. Все построеніе теоріи должно быть ведено чистымъ синтезомъ на основѣ принятаго опредѣленія и предшествующихъ данныхъ. При сложеніи простомъ, т.-е. двухъ чиселъ, первое число играетъ пассивную роль; надъ нимъ производятъ дѣйствіе. Роль второго числа активная; оно характеризуетъ данный видъ дѣйствія. Въ своихъ „Основаніяхъ“ я говорю: „Опредѣленіе сложенія показываетъ, что для составленія суммы прибавляются къ первому слагаемому всѣ единицы второго слагаемаго. Если къ этому замѣчанію присоединимъ опредѣленіе числа, показывающее, что число есть совокупность сосчитываемыхъ при его составленіи единицъ, то выйдетъ заключеніе, что *сумма содержитъ въ себѣ столько единицъ, сколько ихъ есть въ обоихъ слагаемыхъ*“. Логика должна разлагать каждый выводъ на обусловливающіе его доводы или аргументы доказательства. Коль скоро есть сочетаніе нѣсколькихъ аргументовъ, значитъ,

есть уже доказательство, и выводъ называется теоремой. Упомянутое заключеніе о суммѣ вытекаетъ изъ сочетанія двухъ опредѣленій и потому представляетъ теорему, первую въ теоріи сложенія. Вторая теорема указываетъ свойство перемѣстительности слагаемыхъ. Она основана на предыдущей и на первой аксіомѣ о числѣ. Въ руководствѣ ариѳметики не слѣдуетъ начинать такъ рано анализъ доводовъ, но нужно, все-таки, исподволь и вездѣ подготовлять къ нему учащихся. Вѣрнѣйшее средство для этого—точная изоляція сужденій и передача ихъ въ той послѣдовательности, которая, по крайней мѣрѣ, соотвѣтствуетъ строгому анализу. Несомнѣнно, что ясность доказательнаго разсужденія обусловливается не бо́льшимъ или меньшимъ наборомъ поясненій, а, именно, разложеніемъ доказательства на дѣйствительно необходимые для него доводы. Обычные пріемы разсужденій далеко не часто согласованы съ такимъ требованіемъ, и послѣдовательный строй аргументовъ замѣняютъ смѣшеніемъ ихъ въ кучу.

Простое сложеніе никогда не отличаютъ отъ сложнаго, т.-е. отъ заданія болѣе, чѣмъ двухъ, слагаемыхъ. Въ практикѣ дѣйствія,—это, разумѣется, и не имѣетъ значенія. Но слѣдуетъ замѣтить, что съ точки зрѣнія нормальной теоріи дѣйствія больше различія между сложеніемъ двухъ и трехъ слагаемыхъ, чѣмъ сложеніемъ трехъ и хотя милліона чиселъ. Дѣло въ томъ, что въ сложеніи двухъ чиселъ проявляется первый изъ важнѣйшихъ законовъ математики, законъ перемѣстительности, вида $5+7=7+5$, а начиная съ трехъ слагаемыхъ вступаетъ въ силу другой законъ,—сочетательности, вида $(5+7)+8=5+(7+8)$, дальше же, какъ бы ни увеличивалось число слагаемыхъ, ничего новаго не появляется. Объ упомянутыхъ основныхъ свойствахъ обыкновенно не говорятъ отчетливо, а еще чаще ихъ прямо смѣшиваютъ. Факты такого смѣшенія и отсутствія оцѣнки значенія этихъ законовъ наблюдаются и у крупнѣйшихъ иностранныхъ авторитетовъ. Въ своемъ руководствѣ, я, подъ видомъ крайне простого и небезынтереснаго для учащихся разбора того, сколькими способами можно производить сложенія двухъ, трехъ и четырехъ чиселъ, подготовляю къ уясненію основной роли законовъ въ теоріи дѣйствій вообще. Учащіеся пока убѣждаются, что сложеніе двухъ чиселъ производится 2-мя способами, трехъ чиселъ 12-ю, четырехъ 120-ю и что все это разнообразіе обусловлено сочетаніемъ лишь двухъ написанныхъ выше, въ примѣрныхъ числахъ, соотношеній.

Умноженіе.

Читатель видитъ, что, если я буду такъ же подробно разбирать всѣ детали ариѳметическаго ученія и все отличіе моего руководства отъ обычныхъ, то придется писать не статью, а едва ли не цѣлый томъ. Поэтому, хотя до ближайшей надобности въ продолженіи, закончу еще однимъ параграфомъ. Недостатки обычнаго построенія теоріи умноженія менѣе разновидны, чѣмъ тѣ, которые указаны въ предыдущемъ параграфѣ о сложеніи, но вытекаютъ изъ такого же источника безпорядочнаго смѣшенія мелочныхъ выводовъ. Укажу замѣтку о моемъ изложеніи: Въ теоріи упомянутаго дѣйствія съ особой для элементарнаго курса наглядностью начинаетъ выясняться значеніе трехъ законовъ—перемѣстительности, сочетательности и распредѣлительности, опредѣляющихъ въ сущности все обширное содержаніе ученія о реальномъ математическомъ числѣ, начиная отъ цѣлаго ариѳметическаго числа до символа пространственнаго вектора. Постановка вѣрно выбранныхъ главныхъ законовъ въ основу математическихъ выводовъ составляетъ идею, завѣщанную еще издавна, но только теперь приводимую въ исполненіе немногими піонерами дѣла за границей и отчасти у насъ. Идею эту завѣщалъ Лагранжъ, указавшій на особую важность обнаруженія положеній, которыя своей сущностью характеризовали бы весь строй ученія о числѣ. При современномъ этому мыслителю состояніи науки не было средствъ для раскрытія такой философской тайны. Извѣстно, что и далеко позднѣе невѣрно придавали подобный широкій смыслъ инымъ положеніямъ, какъ, напр., закону повторительному, состоящему въ сложеніи показателей при умноженіи степеней съ одинакими основаніями, что, дѣйствительно, играетъ существенную роль въ исчисленіяхъ функціональномъ и символическомъ, но отнюдь не въ главной области ученія о числѣ. Предпочтительную заслугу обоснованія идеи слѣдуетъ, по моему мнѣнію, приписать Уэлю, который напалъ на слѣдъ ся при своемъ оригинальномъ воспроизведеніи ученія о кватерніонахъ. Я лично имѣлъ возможность провѣрить то же инымъ путемъ. Пришлось убѣдиться въ томъ, что построеніе теоріи пространственныхъ векторовъ, т.-е. самаго широкаго ученія о числѣ, возможно лишь при отрицаніи, именно, одного изъ трехъ вышеотмѣченныхъ законовъ, что и указываетъ ихъ значеніе, регулирующее сущность дѣла, и, значитъ, первенствующую роль.

Уже въ самыхъ элементахъ ариѳметики видна та необычайная стройность математическаго ученія, которая осуществляется тогда, когда подъ это ученіе подводится дѣйствительно соотвѣтствующій ему фундаментъ. Достаточно, для частнаго, но характернаго примѣра, сравнить помѣщенное въ моей книгѣ доказательство общей теоремы о видахъ произведенія со всѣми прежними доказательствами извѣстнѣйшихъ авторитетовъ, чтобы видѣть, какъ руководящій принципъ разсѣеваетъ туманъ и избыточное напряженіе мысли, водворяя взамѣнъ ихъ крайнюю простоту, отчтливость и разностороннюю общность. Получается возможность одной, вполнѣ естественной, теоремой замѣнить почти десятки искусственно нагроможденныхъ положеній. Если же прибавить къ этому, что въ указанномъ туманѣ мысли разнородныя свойства перемѣстительности и сочетательности обыкновенно смѣшиваются, а на присущій дѣлу вопросъ о числѣ видовъ произведенія не приходится и наталкиваться, то нужно будетъ заключить, что нормальное освѣщеніе дѣла дается только теперь.

Послѣсловіе статьи.

Въ историческомъ развитіи математики двумъ основнымъ отдѣламъ ея—ариѳметикѣ и алгебрѣ посчастливилось меньше всего. Эти отдѣлы до самаго послѣдняго времени почти не удостоивались вниманія крупныхъ представителей мысли. Геометрія стала точной наукой еще въ древнія времена. Тригонометрія возникла въ общемъ недавно, но подъ вліяніемъ работы серьезныхъ мыслителей она скоро вылилась, хотя и въ краткую, но значительно отдѣланную, статью математики. Развитіе ариѳметики началось въ глубинѣ вѣковъ, однако научное ея значеніе потонуло совсѣмъ въ широтѣ значенія практическаго, и первый отдѣлъ математики создался лишь въ формѣ искусства счисленія. Науки ариѳметики до послѣдняго времени не бывало вовсе. Также и алгебра, развиваясь вначалѣ легко, дала сразу такую массу средствъ для рѣшенія обыденныхъ задачъ, что, въ увлеченіи ближайшими заботами, почти всѣ позабыли о важномъ научномъ значеніи этого прямого ствола всей точной науки. Второй отдѣлъ математики обратился также въ одно безпорядочное искусство счисленія.

Можно указать еще другую причину слабаго донынѣ развитія ариѳметики и алгебры. Первой изъ нихъ помѣшала своимъ возникновеніемъ геометрія древнихъ; второй еще больше—анализъ Ньютона и Лейбница. Въ древнія времена научный матеріалъ

ариѳметики былъ еще слишкомъ узокъ и простъ, чтобы привлекать къ себѣ вниманіе дѣятельной мысли, стремящейся, по склонности человѣчества, все больше и больше въ даль. Въ области геометріи пытливый умъ находилъ для себя и больше разнообразія, и больше таинственной глубины. Еще сложнѣе были тѣ условія, которыя возникли изъ близкаго по времени зарожденія алгебры и анализа безконечно-малыхъ. Слишкомъ простая въ началѣ и не требовавшая тогда глубокой обработки алгебра пассовала вполнѣ передъ могучимъ на дѣлѣ и величественнымъ въ своей туманности анализомъ безконечно-малыхъ. Дѣло развитія ариѳметики и алгебры было свалено на плечи малосильныхъ. Корифеи науки, за очень рѣдкими исключеніями, отвернулись отъ этого дѣла совсѣмъ.

Система алгебры академика Е.

Около двадцати лѣтъ назадъ, нашъ извѣстный ученый, г. Е., стяжавшій своими немаловажными спеціальными трудами званіе заслуженнаго профессора и члена корреспондента Академіи Наукъ, напечаталъ совершенно непродуманную и въ высшей степени наивную статью „О преподаваніи алгебры". Несмотря на такія качества, ясныя, казалось бы, для компетентныхъ лицъ, и на рѣзкій тонъ автора, обрушившагося съ энергичными обвиненіями на весь нашъ педагогическій персоналъ, къ статьѣ отнеслись съ выдающимся оптимизмомъ, напечатали ее въ нѣсколькихъ педагогическихъ журналахъ, и нашелся критикъ, извѣстный педагогъ, назвавшій,—какъ самый фактъ появленія статьи ученаго спеціалиста, такъ и содержаніе ея „отраднѣйшимъ явленіемъ" въ русской педагогической литературѣ. Вскорѣ затѣмъ, въ особой, большой брошюрѣ и, короче, въ журналѣ, я, съ своей стороны, предъявилъ автору статьи обвиненіе въ крайне легкомысленномъ отношеніи къ дѣлу и непониманіи большинства его деталей, представивъ для этого массу указаній и предложивъ, кому угодно, ихъ оспорить. Инцидентъ былъ этимъ исчерпанъ, такъ какъ ни самъ авторъ опровергнутой статьи и никто изъ прежнихъ ея цѣнителей къ предложенному диспуту не обращались.

Какъ появленіе упомянутой статьи, такъ и первая оптимистическая оцѣнка ея въ довольно широкой литературѣ, характеризуютъ средній уровень научнаго и педагогическаго развитія при-

частныхъ, въ то время, къ дѣлу лицъ. Читатель можетъ подумать, что о такомъ прошломъ, если оно тогда и вѣрно была окритиковано мною, нѣтъ основаній теперь вспоминать. Утверждаю, однако, что, за нѣкоторыми исключеніями, въ числѣ, правда, значительно возросшими, прежній туманъ понятій, научныхъ и педагогическихъ, продолжаетъ отстаиваться и въ современной элементарно-математической литературѣ. Я докажу это всѣмъ содержаніемъ настоящей книги, но для облегченія трудной задачи прошу у читателя вниманія къ избранному мною способу и порядку изложенія, и сначала, въ интересахъ все же дальнѣйшаго, напомню указанную статью объ алгебрѣ, перепечатавъ съ несущественной отдѣлкой небольшую часть прежняго моего разбора этой статьи.

Послѣ массы неодобрительныхъ отзывовъ о различныхъ пунктахъ широко захваченной науки, даже не одной общей математики, г. Е. приступаетъ собственно къ алгебрѣ и, упрекнувъ педагоговъ въ томъ, что они не знаютъ, что такое алгебра, указываетъ слѣдующее опредѣленіе, называя его точнымъ: [алгебра даетъ правила для замѣны однихъ дѣйствій рядомъ другихъ дѣйствій надъ тѣми же числами].

Въ дѣйствительности, такое опредѣленіе можетъ быть отнесено къ нѣкоторой части положеній алгебры, но не охватываетъ множества иныхъ положеній, не имѣющихъ со сказаннымъ опредѣленіемъ ничего общаго. Напр., никакого преобразованія дѣйствій мы не усматриваемъ въ утвержденіяхъ, что $-3>-5$, что ур-іе $6x+8y=-11$ не имѣетъ ни цѣлыхъ, ни положительныхъ рѣшеній, что $Lg_2 5$ несоизмѣримъ, что выраженіе a^x, при a положительномъ, но не равномъ единицѣ и при x-сѣ дѣйствительномъ, измѣняется въ границахъ отъ 0 до ∞, и т. д., и т. д..

Послѣ отмѣченнаго указанія сущности алгебры, авторъ даетъ рядъ отрывочныхъ опредѣленій и утвержденій, на большинство которыхъ приходится обратить вниманіе, какъ то:

[Выраженіе, состоящее изъ „чиселъ“ и буквъ, соединенныхъ „разными“ знаками, называется алгебраическимъ выраженіемъ или формулой].

Здѣсь, во-первыхъ, авторъ соединяетъ въ одинъ комплексъ числа и буквы, т.-е. умственныя абстракціи и графическіе знаки. Подобное смѣшеніе совершенно неоднородныхъ понятій обнаруживается у насъ до сихъ поръ сплошь и рядомъ. Затѣмъ, упоминая о раз-

ныхъ знакахъ и, какъ видно изъ другихъ мѣстъ статьи, подразумѣвая и знаки дѣйствій, и знаки соотношеній, авторъ соединяетъ воедино и выраженія, какъ $a+b$, a^2, и формулы, какъ $a=b$, $a^2>b$. Смѣшивать такія математическія понятія все равно, что отождествлять въ грамматикѣ подлежащее или дополненіе съ цѣлымъ предложеніемъ, но и это практикуется у насъ донынѣ почти неуклонно.

[„Каждая" формула выражаетъ „рядъ" дѣйствій, произведенныхъ надъ какими бы то ни было числами, выраженными буквами].

Но, стоитъ взглянуть, напр., на выписанныя мною только что четыре выраженія и формулы, чтобы видѣть, что въ нихъ нѣтъ никакихъ „рядовъ" дѣйствій, да и послѣднія двѣ формулы не могутъ быть относимы къ произвольному выбору входящихъ въ нихъ чиселъ. Также, напр., выраженіе $(-1)^2$ обозначаетъ не рядъ дѣйствій, а только одно и только надъ отрицательной единицей, или выраженіе $e^{2\pi i}$ обозначаетъ, по теоріи мнимыхъ количествъ, одно дѣйствіе и надъ числомъ, опять не произвольнымъ, а равнымъ основанію натуральныхъ логариѳмовъ.

Упомянувъ о дѣйствіяхъ ариѳметическихъ, авторъ заявляетъ: [Но въ алгебрѣ есть то же свои дѣйствія; такъ нѣсколько формулъ можно складывать, вычитать, умножать и дѣлить].

По терминологіи автора, выраженія a^2 и b^2, какъ „состоящія изъ чиселъ и буквъ", должны, вслѣдствіе присутствія послѣднихъ, считаться „алгебраическими формулами", а потому въ суммѣ ихъ a^2+b^2 сложеніе всегда будетъ алгебраическое, хотя, въ случаѣ, когда a и b дѣйствительныя количества и, значитъ, квадраты ихъ положительны, это будетъ сложеніе, какъ можно принять здѣсь, просто абсолютныхъ, т.-е. ариѳметическихъ чиселъ. Вотъ, къ чему приводитъ обычно принятое у насъ отличеніе ариѳметики отъ алгебры по признаку производства дѣйствій, въ первомъ случаѣ надъ числами, обозначенными посредствомъ цифръ, а во второмъ надъ обозначенными посредствомъ буквъ.

Авторъ еще особо подчеркиваетъ то же самое, говоря вслѣдъ за вышесказаннымъ: [Такія дѣйствія называются алгебраическими, въ отличіе отъ ариѳметическихъ дѣйствій, которыя совершаются надъ числами].

Значитъ, противопоставляя здѣсь число не иному чему, какъ, именно, буквѣ, онъ указываетъ намъ, напр., что дѣйствіе въ выраженіи 3—10 нужно считать ариѳметическимъ. Сверхъ того, еще

разъ подчеркивается, что только ариѳметическія дѣйствія имѣютъ объектами умственно представляемыя абстракціи—числа, алгебраическія же дѣйствія производятся не иначе, какъ надъ графическими знаками—буквами или сочетаніями послѣднихъ, какъ между собой, такъ и отчасти съ числами.

Опредѣляя нормальную систему изложенія алгебры, г. Е. даетъ занумерованный имъ самимъ рядъ тридцати основныхъ положеній, между которыми отдѣляетъ 18 собственно положеній, 5 условій и 7 опредѣленій. Содержаніе этихъ положеній и ихъ послѣдовательность обнаруживаютъ странную логику творца системы, что видно изъ слѣдующаго:

[*Положеніе первое.* Результатъ сложенія нѣсколькихъ чиселъ не зависитъ отъ порядка дѣйствій и отъ перестановки слагаемыхъ].

Значитъ, перестановка слагаемыхъ есть нѣчто иное, чѣмъ измѣненіе порядка дѣйствій, и потому, напр., въ выраженіяхъ $a+5+7$ и $a+7+5$ порядокъ дѣйствій считается одинаковымъ. Уже послѣ обнаруживается, что подъ терминомъ порядка дѣйствій авторъ подразумѣваетъ группировку слагаемыхъ, при чемъ весь объемъ этого понятія, какъ и утвержденія о независимости суммы отъ измѣненія такого порядка, выражаетъ однимъ тождествомъ $\overline{5+7}+3=5+\overline{7+3}$. Также, говоря о перемѣстительности слагаемыхъ, онъ указываетъ только формулу $a+b=b+a$, хотя подразумѣваетъ широкое развитіе свойства. Остается непонятнымъ, почему сначала указывается болѣе отвлеченное и удаленное отъ начала свойство сочетательности, а потомъ свойство перемѣстительности, и почему написанныя частныя тождества признаются выражающими общіе объемы соотвѣтствующихъ понятій. Въ концѣ объясненій говорится о томъ, что [если нѣсколько чиселъ соединены знаками сложенія и „вычитанія“, то результатъ „зависитъ“ отъ того порядка, въ которомъ производятся указанныя дѣйствія], и, такимъ образомъ, ариѳметическія свойства перемѣстительности и сочетательности сложенія не только не распространяются на алгебраическое сложеніе, но въ началахъ алгебры прямо даже отрицаются. Свое курьезное предыдущее указаніе авторъ объясняетъ тѣмъ, что въ выраженіи $10-6+3$ вычисленіе по порядку $\overline{10-6}+3$ даетъ 7, а вычисленіе по плану $10-\overline{6+3}$ даетъ 1, при чемъ упускается изъ виду, что второй планъ вычисленія соотвѣтствуетъ не данному выраженію, а иному $10-6-3$.

[*Условіе первое.* Если нѣсколько чиселъ соединены знаками сложенія и вычитанія, то условимся производить дѣйствія въ томъ порядкѣ, какъ они написаны, начиная съ лѣвой стороны].

Въ отчетливомъ курсѣ подобное указаніе о порядкѣ дѣйствій представляетъ естественный выводъ изъ опредѣленій сложенія и вычитанія нѣсколькихъ чиселъ и изъ указаній о способѣ обозначенія этихъ дѣйствій. Здѣсь же это является апріорнымъ условіемъ, чѣмъ-то въ родѣ постулата.

[*Положеніе второе.* При соблюденіи сказаннаго выше условія, результатъ сложенія и вычитанія нѣсколькихъ чиселъ не измѣнится, если переставимъ числа вмѣстѣ со знаками, стоящими передъ ними].

Сказанное только что условіе намѣчало единственный и, значитъ, неизмѣнный порядокъ вычисленія, а въ формулировкѣ новаго положенія указываются уже многіе другіе, т.-е., по логикѣ автора, выходитъ, что „при соблюденіи принятаго условія", можно его не соблюдать. Кромѣ того, здѣсь авторъ говоритъ о перестановкѣ „чиселъ" вмѣстѣ съ ихъ знаками, т.-е. пользуется алгебраической идеей объ активныхъ числахъ, отмѣчающихъ прибавленіе или отниманіе, и условіемъ объ отнесеніи къ обозначеніямъ такихъ чиселъ знаковъ отмѣчаемыхъ ими дѣйствій, не считая, однако, нужнымъ объяснять ни эту, важнѣйшую для алгебры, идею, ни принятое алгебристами основное условіе.

[*Положеніе третье.* Чтобы вычесть послѣдовательно нѣсколько чиселъ, можно сразу вычесть ихъ сумму].

Въ этомъ пунктѣ, четвертомъ по счету, авторъ даетъ теорему о вычитаніи, самое же опредѣленіе вычитанія формулируетъ лишь въ 14-мъ пунктѣ. Здѣсь же самъ онъ пользуется скобками, какъ и съ перваго пункта пользовался замѣняющей скобки продольной чертой, вообще же, возставая, еще въ началѣ статьи, энергично противъ скобокъ, разрѣшаетъ всеобщее примѣненіе таковыхъ, лишь начиная съ 13-го пункта, гдѣ говорится объ умноженіи суммы на число.

Послѣ указанныхъ четырехъ положеній, относящихся къ сложенію и вычитанію, слѣдуютъ аналогичныя четыре объ умноженіи и дѣленіи. Они интересны тѣмъ, что показываютъ особую настойчивость автора въ повтореніи совершенно аналогичныхъ прежнимъ ошибокъ.

[*Положеніе четвертое.* Результатъ перемноженія нѣсколькихъ чиселъ не зависитъ отъ порядка дѣйствій и отъ перестановки множителей].

Перестановка множителей не считается измѣненіемъ порядка дѣйствій, который, значитъ, напр., въ выраженіяхъ $a.5.7$ и $a.7.5$ считается одинаковымъ. Подъ порядкомъ, оказывается, нужно разумѣть группировку множителей, понятіе о которой во всемъ его объемѣ выражается формулой $\overline{a\times b}\times c=a\times\overline{b\times c}$. Въ этой формулѣ, скобокъ, какъ и слѣдуетъ, не написано, но продольныя черты входятъ. Весь объемъ свойства перемѣстительности выраженъ однимъ равенствомъ $a\times b=b\times a$. [Когда нѣсколько чиселъ соединены знаками умноженія и „дѣленія", результатъ уже „зависитъ" отъ того порядка, въ которомъ производятся дѣйствія]. Для объясненія приводится примѣръ выраженія $24:6\times 2$, въ которомъ вычисленіе по порядку $\overline{24:6}\times 2$ даетъ 8, а вычисленіе по плану $24:\overline{6\times 2}$, соотвѣтствующему, замѣтимъ отъ себя, иному выраженію $24:6:2$, даетъ 2.

[*Условіе второе.* Если нѣсколько чиселъ соединены знаками умноженія и дѣленія, то условимся производить дѣйствія въ томъ порядкѣ, въ которомъ они написаны, начиная съ лѣвой стороны].

Снова, взамѣнъ вывода изъ опредѣленій сложнаго умноженія и дѣленія, и указаній о способѣ обозначенія этихъ дѣйствій, воздвигается самостоятельное апріорное условіе, второй постулатъ. Интересно, что авторъ, вездѣ соединяющій знаками дѣйствій не обозначенія чиселъ, а самыя „числа", въ умноженіи замѣняетъ знакъ точку косымъ крестомъ, какъ бы для болѣе прочнаго скрѣпленія неощутимыхъ чувствами отвлеченностей.

[*Положеніе пятое.* Результатъ перемноженія и дѣленія нѣсколькихъ чиселъ при соблюденіи указаннаго условія не измѣнится, если мы переставимъ числа вмѣстѣ со стоящими передъ ними знаками].

По неудачной формулировкѣ, выходитъ опять, что, „при соблюденіи указаннаго условія", можно его не соблюдать. Идея объ активныхъ числахъ умноженія и дѣленія и условіе объ отнесеніи къ нимъ знаковъ соотвѣтствующихъ дѣйствій считаются, повидимому, очевидными предпосылками, потому что ничѣмъ не объясняются.

[*Положеніе шестое.* Раздѣлить послѣдовательно на нѣсколько чиселъ все равно, что раздѣлить на ихъ произведеніе].

Указывается теорема о дѣленіи, кстати сказать, въ ариѳметикѣ обычно не доказываемая, а самаго опредѣленія дѣленія въ разсматриваемой системѣ совсѣмъ нѣтъ, что, въ виду даваемаго, хотя

значительно дальше, опредѣленія вычитанія, нѣсколько нарушаетъ стройную вообще систему. Въ объясненіяхъ цитируемаго положенія, авторъ говоритъ между прочимъ, что [„дѣленіе“ изображается въ формѣ „дроби“], какъ нерѣдко говорятъ у насъ и другіе въ аналогичныхъ случаяхъ, но, по указаніямъ логики, дѣленіе есть процессъ, а дробь объектъ, и нельзя, конечно, процессъ „изображать“ въ формѣ объекта.

Оберегая вниманіе и трудъ читателя, опускаю подъ рядъ 12 положеній, разобранныхъ въ прежней статьѣ моей также поодиночкѣ, но имѣющихъ болѣе частный характеръ. Остановлюсь на нѣсколькихъ изъ оставшихся.

[*Опредѣленіе четвертое.* Отрицательнымъ многочленомъ назовемъ такой многочленъ, въ которомъ, совершая дѣйствія, начиная съ лѣвой стороны, мы приходимъ къ невозможному вычитанію].

Для примѣра приводится выраженіе 7—5—8+9, въ которомъ вычитаніе 8-ми становится невозможнымъ, но послѣ соглашенія о перестановкѣ чиселъ вмѣстѣ съ ихъ знаками, ученики не затруднятся найти окончательный результатъ, равный, какъ оказывается, положительному числу +3. Можно поставить вопросъ, будетъ ли отрицательнымъ, или нѣтъ многочленъ, напр., $a-b-c+d$, но, по сказанному опредѣленію, рѣшеніе этого вопроса недоступно при буквенномъ обозначеніи чиселъ.

[*Опредѣленіе пятое.* Положительнымъ многочленомъ называется такой многочленъ, въ которомъ всѣ дѣйствія, начиная съ лѣвой стороны, возможны].

Для примѣра приводится тотъ же самый многочленъ, только иначе написанный, 7—5+9—8, и, для вящшаго вразумленія, поясняется, что, при перестановкѣ чиселъ со знаками, положительный многочленъ можетъ переходить въ отрицательный. Въ виду такого объединенія идей о положительности и отрицательности, возбужденный нами только что вопросъ о значеніи многочлена $a-b-c+d$ оказывается празднымъ, потому что, если бы, по предыдущему пункту, этотъ многочленъ и оказался отрицательнымъ, то разбираемый теперь пунктъ, можетъ быть, перевелъ бы его въ положительный.

[*Условіе четвертое.* Распространимъ всѣ положенія, найденныя для положительныхъ многочленовъ, и на отрицательные многочлены].

Разумѣется, это и нетрудно въ данномъ случаѣ, вслѣдствіе несущественнаго различія между обоими видами многочленовъ.

Вообще, пріемъ построенія науки съ помощью согласительныхъ условій очень простъ, а потому, вѣроятно, и развился такъ въ наше новѣйшее время.

[*Условіе пятое.* Въ выраженіи 0—5 условимся отбрасывать нуль и писать такъ: —5; это и будетъ простѣйшимъ выраженіемъ для отрицательнаго двучлена].

Такимъ образомъ, число —5 оказалось двучленомъ. Мы видимъ примѣры все большаго и большаго объединенія встрѣчавшихся въ наукѣ различій.

[*Опредѣленіе шестое.* Число со знакомъ минусъ впереди назовемъ отрицательнымъ].

Числа со знаками передъ ними были введены авторомъ въ самомъ началѣ его системы и тамъ способствовали своими перестановками не соблюдать условія, назначеннаго для соблюденія. Затѣмъ, перестановки тѣхъ же чиселъ объединили понятія о положительномъ и отрицательномъ многочленахъ. Но, лишь послѣ уподобленія отрицательныхъ чиселъ двучленамъ, названіе за этими числами укрѣплено. Въ сущности, такова практикуемая до сихъ поръ манера введенія отрицательныхъ чиселъ, по идеѣ счета, только у нашего автора она изложена вполнѣ искренно, безъ обманнаго маскированія, а потому и кажется немного шокирующей.

[*Опредѣленіе седьмое.* Въ отличіе отъ отрицательныхъ чиселъ положительными числами назовемъ обыкновенныя числа, употребляемыя въ ариѳметикѣ; передъ ними нужно подразумѣвать знакъ плюсъ].

Такъ и всѣ говорятъ донынѣ. Только рѣдкіе упрямцы рекомендуютъ не смѣшивать понятій о модулѣ положительнаго числа и о самомъ числѣ, а также при обозначеніи модулей не только не обязываютъ ставить плюсъ, но, хотя съ логической точки зрѣнія, считаютъ такую постановку неумѣстною.

[*Положеніе пятнадцатое.* Чтобы сложить положительное число съ отрицательнымъ, нужно на самомъ дѣлѣ «ихъ» вычесть и поставить знакъ „бо̀льшаго количества"].

Возникаетъ вопросъ, что же изъ чего вычесть,—положительное ли число изъ отрицательнаго, или отрицательное изъ положительнаго, и какъ произвести это вычитаніе, когда рѣчь началась еще только о сложеніи количествъ. Кромѣ того, въ примѣрѣ сложенія $+5+(-7)$ большимъ количествомъ считается $+5$, а, вѣдь, сумма не положительна.

[*Положеніе шестнадцатое.* Чтобы сложить отрицательныя числа между собой, нужно „ихъ“ на самомъ дѣлѣ сложить и передъ „суммой“ поставить знакъ минусъ].

Понятно, что, когда дано сложить отрицательныя числа, то и нужно ихъ складывать, но вопросъ въ томъ, какъ же это сдѣлать, когда рѣчь идетъ, именно, о правилѣ сложенія. Сверхъ того, если, зная безъ автора правило сложенія, мы, по совѣту автора, сложимъ отрицательныя количества, а потомъ поставимъ передъ суммой знакъ минусъ, то выйдетъ двойной минусъ, т.-е. сумма отрицательныхъ чиселъ окажется положительной.

[*Положеніе семнадцатое.* Чтобы вычесть отрицательное число, нужно прибавить „равное“ ему по величинѣ положительное число].

Такъ говорятъ обыкновенно, а въ разбираемой статьѣ равенство отрицательныхъ и положительныхъ чиселъ должно соотвѣтствовать уподобленію такого же двоякаго рода многочленовъ. Я ввелъ терминъ „равнопротивоположность“ количествъ, особо нужный въ тригонометріи, но этотъ терминъ и теперь считается лишнимъ.

Слѣдуя принятой донынѣ манерѣ развивать алгебру, какъ и ариѳметику, только изъ идеи счета, г. Е., только по изложеніи своей системы, устанавливаетъ впервые понятіе о величинѣ, но и тутъ въ основу кладетъ счетъ. Онъ раздѣляетъ всѣ величины на обсолютныя и относительныя, называя абсолютными тѣ, [которыя могутъ быть отсчитываемы въ одну сторону до безконечности], и относительными тѣ, [которыя могутъ быть отсчитываемы въ двѣ противоположныя стороны до безконечности]; примѣромъ абсолютной величины указывается — вѣсъ, примѣромъ относительной — время.

Изъ этого слѣдуетъ, что народонаселеніе, хотя бы, всего земного шара, какъ не допускающее отсчетъ „до безконечности“, не есть величина абсолютная. Съ другой стороны, синусъ при радіусѣ единицѣ, хотя и допускающій „отсчетъ“ въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ, но также не до безконечности, не есть вовсе величина, ни абсолютная, ни относительная.

Далѣе, авторъ разграничиваетъ понятія о нулѣ абсолютномъ и относительномъ, и говоритъ, что [относительныя величины не имѣютъ абсолютнаго нуля], но что [для отсчитыванія такихъ величинъ нужно за исходный пунктъ принять величину произвольную]. Слѣдовательно, если даже авторъ удалитъ отъ безконечности опредѣле-

ніе относительной величины и согласится принять въ число такихъ величинъ тригонометрическій синусъ, то все-таки окажется, что означенный синусъ, при всемъ разнообразіи процесса его измѣненія, никогда не получитъ значенія, равнаго абсолютному нулю. Съ другой стороны, если принять въ расчетъ, что понятіе „произвольной" величины не ограничено даже требованіемъ однородности, то можно изъ указаній автора вывести заключеніе, что „нулемъ" для счета времени можетъ служить любой размѣръ вѣса.

Статья была закончена двумя заявленіями, изъ которыхъ первое гласило: [Все изложенное здѣсь я предлагаю принять гг. педагогамъ въ руководство при первоначальномъ преподаваніи алгебры]. То обстоятельство, что статья эта была принята съ почетомъ, перепечатывалась въ нѣсколькихъ изданіяхъ и была, хотя однимъ лицомъ, принята за отраднѣйшее явленіе въ педагогической литературѣ, показываетъ, что авторъ не слишкомъ ошибался въ ожиданіи сочувствія той среды, въ которую направлялъ свое руководство.

Второе заявленіе гласило: [Думаю, что мною выяснены мельчайшія подробности начальной алгебры, и въ умахъ учениковъ не останется никакихъ сомнѣній]. Учениковъ мнѣ удалось спасти отъ подобной выучки, хотя отчасти, потому что распространенные нынѣ учебники все же не развиваютъ исключительно систему г. Е., а представляютъ, какъ докажу ниже, нѣчто среднее между системой его и моей.

Учебникъ алгебры.

Мой учебникъ алгебры, въ первомъ его изданіи, постановленіемъ Учебнаго Комитета Мин. Нар. Просв., не былъ допущенъ въ учебныя заведенія, т.-е., говоря короче, былъ запрещенъ. Во второмъ изданіи, не измѣненномъ по существу, но обработанномъ, онъ былъ тѣмъ же Комитетомъ, въ составѣ отчасти другихъ лицъ, одобренъ, какъ руководство для гимназій. Въ 4-мъ изданіи, вторая часть учебника, нисколько не измѣненная, но въ самомъ концѣ книги немного дополненная, оказалась, вслѣдствіе общей о ней рецензіи профессора К., снова запрещенной. Въ наличномъ до сихъ поръ 8-мъ изданіи, въ силу дополнительной рецензіи академика С., запрещена также и первая часть.

Интересно то, что ровно за годъ до состоявшагося недавно окончательнаго устраненія моего учебника, составитель патентованнаго раньше и наиболѣе ходкаго руководства по алгебрѣ, г. преподаватель К., въ 23-мъ изданіи этой книги отрекся отъ своей прежней системы и переработалъ заново весь главный матеріалъ въ духѣ моихъ воззрѣній, насколько они оказались имъ понятыми. На этотъ разъ заимствованіе осуществлено уже не въ частныхъ деталяхъ, а въ массѣ матеріала. Я разберу свой учебникъ параллельно съ 7-мъ и съ послѣднимъ изданіями руководства г. К.. Попутно буду сравнивать эту книгу съ соотвѣтствующими другихъ авторовъ.

Введеніе буквъ.

Въ ариѳметикѣ, еще въ недавнее время, введеніе буквеннаго обозначенія чиселъ было подчинено строгому ограниченію. Обыкновенно допускалось это лишь въ пропорціяхъ для обозначенія неизвѣстнаго члена. Въ задачахъ, хотя „алгебраическаго“ характера, но не достигавшихъ вершинъ ариѳметики—пропорцій, стѣснялись вводить даже одну букву x. Ее замѣняли иногда вопросительнымъ знакомъ. Въ строгомъ смыслѣ слова, ариѳметика считалась наукой о числахъ—только опредѣленныхъ, обозначаемыхъ посредствомъ цифръ. Коль скоро вводились буквы, начиналась уже алгебра. Лишь въ меньшинствѣ учебниковъ распространялось нѣсколько шире употребленіе буквъ, напр., въ формулировкѣ теоремъ о дѣлимости чиселъ и въ составленіи общихъ формулъ, разрѣшающихъ задачи на „правила“. Авторы этихъ учебниковъ оправдывали свое новаторство стремленіемъ подготовить учениковъ исподволь къ алгебрѣ.

Я лично считаю прежній ригоризмъ стиля обозначеній вполнѣ основательнымъ. На сколько я внимательно просмотрѣлъ теперь мое руководство ариѳметики, въ немъ, кажется, также входятъ лишь буквы x и y, въ правилахъ тройномъ и цѣпномъ. Но основаніе моего ригоризма не во взглядѣ на ариѳметику, какъ на науку объ опредѣленныхъ числахъ. Я также не думаю, что алгебра начинается съ момента обозначенія чиселъ буквами. Не устанавливая пока того критерія, которымъ отличаю ариѳметику отъ алгебры, скажу просто, что въ начальномъ учебникѣ ариѳметики нѣтъ, въ сущности, никакой надобности вводить гдѣ либо буквы, какъ символы чиселъ, хотя кое-гдѣ это и оказалось бы удобнымъ. Общность доказательства теоремъ требуетъ общности доводовъ

этихъ доказательствъ, а не отвлеченія въ обозначеніяхъ. У насъ, наоборотъ, нерѣдко говорятъ объ общихъ числахъ, а доводы разсужденія выставляютъ такіе, какіе относятся лишь къ числамъ отдѣльнаго типа. Что касается рѣшенія задачъ, то главные для этого синтетическіе способы—приведенія къ единицѣ и пропорціональнаго измѣненія—настолько просто и однообразно примѣняются ко всевозможнымъ числамъ, что составленіе общихъ формулъ, въ подобныхъ случаяхъ, не только излишне, но и вредно, такъ какъ этимъ пріемомъ простое, но всегда критическое, соображеніе рѣшающаго задачу замѣняется ссылкой на не всегда надежную память. Способы аналитическіе, какъ—провѣряемаго допущенія и произвольнаго выбора единицы,—используютъ собственно анализъ лишь въ его зародышевомъ состояніи, въ формѣ, можно сказать, одного только шага отъ неизвѣстнаго, послѣ чего въ дѣло вступаетъ опять господствующій въ ариѳметикѣ синтезъ. Поэтому, обозначать неизвѣстное буквой значило бы напрасно удерживать это неизвѣстное все время въ памяти, въ теченіе вычисленія, отнесеннаго уже первымъ шагомъ анализа къ числамъ извѣстнымъ.

Г. К., подобно большинству другихъ авторовъ, выяснялъ раньше пользу введенія буквъ одной задачей на простое тройное правило, для которой составлялъ общее выраженіе неизвѣстнаго. Задача рѣшалась способомъ приведенія къ единицѣ, т.-е. подразумѣвалось самое простое заданіе чиселъ и самое доступное соображеніе рѣшающаго. Это, именно, тотъ случай, когда ученикамъ составленіе общаго выраженія неизвѣстнаго и надобность его запоминать покажутся наименѣе полезными. Идея, якобы, упрощенія преобразуется для самихъ учениковъ въ лишній фактъ несомнѣннаго затрудненія. Въ новомъ изданіи упомянута еще формула перемѣстительности умноженія. Но въ ариѳметикѣ того же автора формула эта не отмѣчена, какъ одна изъ важнѣйшихъ по ея теоретическому значенію. Съ практической же стороны, ученики настолько свыкаются съ возможностью перестановки двухъ множителей, что общее выраженіе этого свойства едва ли привлечетъ ихъ вниманіе. Въ итогѣ, польза употребленія буквъ, разъясняемая такими примѣрами, не только не будетъ понята, но скорѣе будетъ отвергнута.

Въ моемъ учебникѣ, въ первомъ пунктѣ введенія буквъ, я пишу нѣсколько примѣровъ четныхъ чиселъ и указываю ихъ общее выраженіе $2a$, потомъ пишу нѣсколько чиселъ, дѣлящихся на три

съ остаткомъ 2 и составляю выраженіе $3a+2$. Этимъ поясняю, что введеніе буквъ способствуетъ обобщенію отдѣльныхъ числовыхъ понятій.—Затѣмъ, отмѣчаю формулы $a+b=b+a$ и $(a+b).c=$ $=a.c+b.c$, которыхъ широкое значеніе было еще въ ариѳметикѣ раскрыто. Это наводитъ учащихся на мысль, что при посредствѣ буквъ наглядно выражаются важныя свойства чиселъ и дѣйствій съ ними.—Далѣе, на доказательствѣ основного свойства разностной пропорціи, я касаюсь понятія о преобразованіи равенства прибавленіемъ поровну къ обѣимъ частямъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ даю примѣръ упрощенія доказательства съ внѣшней его стороны. Въ этомъ же пунктѣ отыскиваю число, которое, послѣ перестановки его цифръ и вычитанія изъ даннаго числа новаго обращеннаго, даетъ въ разности 9, что привожу къ равенству $10x+y-$ $-(10y+x)=9$, или, послѣ упрощенія первой части и преобразованія дѣленіемъ, $x-y=1$, рѣшеніемъ котораго, въ цѣлыхъ однозначныхъ числахъ, поясняю возможность изслѣдованія чиселъ.— Затѣмъ, рѣшаю синтетическія задачи на простое тройное правило и на совмѣстное дѣйствіе двухъ рабочихъ силъ, что приводитъ къ составленію общихъ формулъ для этихъ задачъ.—Наконецъ, рѣшая извѣстные типы аналитическихъ задачъ о задуманномъ числѣ, соотвѣтствующемъ ряду условій $(4x+20):15=8$, и о покупкѣ два раза разныхъ количествъ товара двухъ сортовъ, что соотвѣтствуетъ равенствамъ затратъ $3x+4y=47$ и $5x+6y=75$, я показываю особую наглядность рѣшенія этихъ задачъ по алгебраическому пріему преобразованія равенствъ. Такъ подробно вопросъ о пользѣ введенія буквъ нигдѣ не разсматривается. Но думаю, что эти подробности окажутся для начинающихъ изученіе алгебры и интересными, и убѣдительными.

Введеніе отрицательныхъ чиселъ.

Въ прежнихъ двадцати двухъ изданіяхъ универсально патентованнаго руководства алгебры, авторъ его г. К. съ неизмѣнной точностью и съ подавляющимъ успѣхомъ въ офиціальной и педагогической средѣ устанавливалъ взглядъ на отрицательныя числа, близко сходный съ разобраннымъ мною выше взглядомъ академика Е.. Какъ и въ той системѣ алгебры, подготовка учениковъ къ усвоенію труднаго понятія начиналась разборомъ теоріи многочлена. Ради педагогическаго такта, усвоенію подлежало сначала не самое это понятіе, а тотъ терминъ, который впослѣдствіи ему предназначался. Для этого члены многочлена, данные сначала

въ формѣ буквенныхъ выраженій, раздѣлялись, по знакамъ сложенія и вычитанія, на положительные и отрицательные. Не для всякихъ выраженій, а спеціально лишь для многочленовъ, устанавливалось понятіе о численной величинѣ, получаемой послѣ замѣны буквъ числами и производства всѣхъ указанныхъ въ членахъ дѣйствій. Когда многочленъ уже превращался въ послѣдовательность извѣстныхъ чиселъ, раздѣляемыхъ знаками сложенія и вычитанія, авторъ устанавливалъ и провѣрялъ непосредственнымъ вычисленіемъ постулатъ о независимости численной величины многочлена отъ порядка его членовъ, если только послѣдніе переставляются вмѣстѣ съ ихъ знаками. Знакомство съ этимъ постулатомъ естественно приводило къ тому, что, прежде воспріятія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ умомъ, ученики уже видѣли тѣ и другія числа мелькающими часто передъ глазами, и потому довольно хорошо знакомились съ ними. Еще болѣе способствовало этому правило: [чтобы найти численную величину многочлена, складываютъ всѣ положительные члены между собою и всѣ отрицательные между собою и изъ первой суммы вычитаютъ вторую]. Упоминаемая въ этомъ правилѣ сумма отрицательныхъ членовъ, конечно, всегда должна была оказываться, какъ и самые члены, отрицательной, и, такимъ образомъ, ученики, еще не доведенные до самостоятельнаго понятія объ отрицательномъ числѣ, складывали, однако, и положительныя, и отрицательныя числа и даже потомъ вычитали отрицательную сумму изъ положительной, производя, впрочемъ, послѣднее дѣйствіе по упрощенному способу, безъ обращенія вниманія на знакъ вычитаемаго. При всемъ томъ, надобность введенія отрицательныхъ чиселъ еще не было выяснена, и нужны были дополнительные шаги. Академикъ Е., заботясь меньше о педагогіи, чѣмъ о наукѣ, просто раздѣлялъ многочлены на положительные и отрицательные, по признаку доступнаго ариѳметикѣ или недоступнаго вычитанія членовъ, и указывалъ при этомъ, что перестановка членовъ можетъ превращать отрицательный многочленъ въ положительный и наоборотъ. Преподаватель К. выяснилъ болѣе понятную для учениковъ сторону дѣла, раздѣливъ многочлены по тому же, только что упомянутому, признаку, на возможные и невозможные, какъ, для примѣра послѣдняго, $3-12-2+32$, получившійся изъ возможнаго черезъ перестановку крайнихъ членовъ. Вліяніе подобной перестановки оказывалось здѣсь уже болѣе рѣзкимъ, такъ какъ она превращала возможный

объектъ въ невозможный и достигала также обратнаго эффекта. Но оставались еще многочлены, абсолютно невозможные, какъ 2—1+3—8. Вотъ, для ассимилированія такихъ недоступныхъ многочленовъ и были вводимы подлинныя отрицательныя числа. Но и это дѣлалось еще не скоро, такъ какъ раньше съ тѣмъ же ариѳметическимъ взглядомъ на числа и дѣйствія съ ними разсматривалось приведеніе подобныхъ членовъ, „алгебраическія" сложеніе и вычитаніе одночленовъ и многочленовъ и заключеніе въ скобки. Только, когда въ скобки приходилось заключать „невозможную часть" многочлена, оказывалось полезнымъ установить слѣдующія условія: [1) Разность между одинаковыми числами принимается равной нулю. Такъ 7—7=0. 2) Разность между меньшимъ числомъ и бо́льшимъ принимается равной избытку большаго числа надъ меньшимъ, взятому со знакомъ минусъ. Такъ 7—10=—3].

Думаю, что, если бы спросить любого ребенка, умѣющаго считать до трехъ, „сколько у него останется отъ трехъ конфектъ, если онъ всѣ ихъ съѣстъ", то ребенокъ отвѣтитъ „ничего" и убѣжденно не допуститъ иного заключенія, а, вѣдь, условіе предполагаетъ возможность хотя двухъ различныхъ заключеній. Думаю также, что всякій ученикъ, даже и вызубривъ упомянутые пункты науки, останется при личномъ убѣжденіи, что вычитать изъ меньшаго числа большее такъ же невозможно по полюбовному соглашенію, какъ безъ этого соглашенія.

Въ своемъ учебникѣ, я, пояснивъ на одной страницѣ примѣрами относительно прибыли и убытка, или повышенія и пониженія температуры, что числа нерѣдко приходится разсматривать, какъ прибавляемыя или отнимаемыя, указываю единственный принципъ введенія понятія о направленномъ числѣ или, по терминологіи Коши, алгебраическомъ количествѣ: „Въ алгебрѣ принято условіе разсматривать числа прибавляемыя и отнимаемыя самостоятельно, независимо отъ тѣхъ чиселъ, къ которымъ разсматриваемыя числа прибавляются, или отъ которыхъ они отнимаются.... Прибавляемыя числа называются иначе положительными, отнимаемыя—отрицательными.... Разсматривая какую-нибудь сумму, напр., 7+5, относятъ условно знакъ дѣйствія + ко второму числу и полагаютъ, что выраженіе 7+5 обозначаетъ соединеніе числа 7 съ положительнымъ количествомъ +5.... Разсматривая какую-нибудь разность, напр., 7—5, относятъ условно знакъ дѣйствія—ко второму числу и принимаютъ, что выраженіе 7—5 обозначаетъ соединеніе числа

7 съ отрицательнымъ количествомъ —5.... При производствѣ вычисленій съ ариѳметическими числами, можно уподоблять числа положительнымъ количествамъ, и потому, если число написано безъ знака, то можно передъ нимъ подразумѣвать знакъ +. Такимъ образомъ, 7+5 или +7+5 есть соединеніе двухъ положительныхъ количествъ, а 7—5 или +7—5 соединеніе положительнаго количества съ отрицательнымъ.... Введеніе въ науку самостоятельнаго понятія о количествѣ расширяетъ числовыя понятія и упрощаетъ способы вычисленія. Такъ: 1) Ариѳметическія дѣйствія сложеніе и вычитаніе соединяются въ одно дѣйствіе—соединеніе количествъ. 2) На разность 5—7 можно смотрѣть, какъ на соединеніе, напр., 5 рублей прибыли съ 7 рублями убытка или повышенія температуры на 5 градусовъ съ пониженіемъ ея же на 7 градусовъ, и потому эта разность есть —2. 3) Формулы, содержащія обозначенія разности, какъ, напр., $a+(b-c)=(a+b)-c$, въ ариѳметикѣ разсматриваются подъ ограниченіями, какъ $b>c$, а въ алгебрѣ становятся совершенно общими. 4) Тѣ же формулы, съ точки зрѣнія ариѳметики, не могутъ считаться очевидными и требуютъ доказательствъ, а въ алгебрѣ всякая алгебраическая сумма, какъ представляющая соединеніе количествъ, очевидно, допускаетъ всякія перемѣщенія и измѣненія группировки этихъ количествъ, взятыхъ только вмѣстѣ съ ихъ знаками.

Выраженіе и формула.

Введенное мною различеніе понятій о выраженіи и формулѣ давно уже усвоено нѣкоторыми авторами. Но и по настоящее время Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. видитъ въ этомъ различеніи дефектъ моего учебника. Выраженіемъ я называю—или обозначеніе количества буквой, или соединеніе знаковъ чиселъ посредствомъ знаковъ дѣйствій. Такъ: a, $3a+2$, $\frac{4}{a-b}$ суть выраженія. Формулой называю соединеніе знаковъ чиселъ или выраженій посредствомъ одного изъ знаковъ соотношеній. Такъ: $a=b$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$, $a-b<ab$ суть формулы. Академикъ С., въ своей рецензіи, сначала ссылается на авторитеты лицъ, называвшихъ формулами тѣ обозначенія, которымъ я присваиваю особое названіе выраженій. Приходится, на мой взглядъ, сожалѣть о томъ, что эти авторитеты не усмотрѣли давно уже надобности въ двухъ терминахъ для различенія двухъ понятій, несомнѣнно разнородныхъ. Далѣе, въ рецензіи г. С. ука-

зано: [Когда говорятъ о формулѣ Кардана, ни у кого не мелькаетъ мысли о какомъ-нибудь равенствѣ, и, наконецъ, самъ г. Ш. говоритъ „формулы корней квадратнаго уравненія приложимы"....] Но, помимо очевидной обмолвки критика, утверждающаго, ad majorem gloriam suam, что у него не мелькаетъ мысль о какомъ-нибудь „равенствѣ" даже тогда, когда онъ читаетъ у другихъ и пишетъ самъ о корняхъ квадратнаго или кубическаго „уравненій", мнѣ кажется, что, говоря о вышеупомянутыхъ формулахъ, всякій обязанъ думать о томъ, что одна изъ нихъ представляетъ равенство, опредѣляющее корни квадратнаго ур-ія, а другая корни ур-ія 3-й степени. Что до меня касается, то, употребляя въ словахъ „формулы корней" множественное число, я этимъ показываю, что думаю одновременно о двухъ равенствахъ, выражающихъ корни квадратнаго уравненія порознь. Крайне странно, что въ наукѣ, считаемой за точную, представляющей, по словамъ Араго, формальную логику, предлагаютъ не различать понятія, ясно различимыя. Выраженіе есть объектъ математической мысли. Формула выражаетъ цѣлую мысль. Я уже упоминалъ о томъ, что смѣшивать эти понятія значитъ то же, что въ грамматикѣ смѣшивать подлежащее или дополненіе съ цѣлымъ предложеніемъ.

Одночленъ и многочленъ.

Особое опредѣленіе одночлена, введенное мною, также перешло давно уже въ другія руководства, не исключая и одобренныхъ. Но допуская мои опредѣленія, какъ формулы, такъ и одночлена, у нѣкоторыхъ авторовъ, Уч. Ком. относительно моего учебника держится иного мнѣнія. Я называю одночленомъ выраженіе,—или не содержащее знаковъ сложенія и вычитанія, или въ которыхъ рядъ обозначенныхъ дѣйствій не заканчивается сложеніемъ или вычитаніемъ. Въ силу этого опредѣленія, не только выраженія a, $\frac{3a}{bc}$, но и $(a+b)^3$, $\frac{a}{5b-c}$ принимаются за одночлены. Многочленомъ называю алгебраическую сумму нѣсколькихъ одночленовъ, между которыми есть, по крайней мѣрѣ, два неприводимыхъ. По этому опредѣленію, дополняющему обычное условіемъ о неприводимости, выраженія $a+a$ или $b-b$, конечно, не окажутся многочленами, а будутъ таковыми, напр., a^2-2ab или $-5a+2b-3c^3$. Академикъ С. по поводу перваго опредѣленія говоритъ: [прочитавъ это опредѣленіе, можно подумать, что авторъ, склонный къ своеобразнымъ обобщеніямъ, умышленно хочетъ сбить съ толку уче-

ника. Въ силу этого опредѣленія, ученикъ выпалитъ, что квадратъ трехчлена $a+b+c$ есть одночленъ $(a+b+c)^2$, что отъ дѣленія одночлена на одночленъ получается многочленъ, какъ, напр., отъ дѣленія a на $\frac{a}{5b-c}$, что одночленъ можетъ дѣлиться безъ остатка на многочленъ, напр., одночленъ автора $(a+b)^3$ дѣлится на $a^2+2ab+b^2$]. Возраженіе формулировано сильно, но нужно вникнуть въ него, чтобы оцѣнить по достоинству. О первомъ пунктѣ замѣчу, что, пока выраженіе $(a+b+c)^2$ не разложено въ сумму, оно и есть одночленъ, какъ, напр., и выраженіе $\frac{a}{1-b}$, каковое, однако, никому не возбраняется разложить при $b<1$ даже въ безконечный рядъ—убывающую прогрессію. Если бы не ученикъ, а самъ г. С. различалъ такія, несомнѣнно различныя, формы выраженій, то онъ не отмѣчалъ бы въ своемъ возраженіи дѣлимость $(a+b)^3$ на $a^2+2ab+b^2$, потому что это дѣленіе выполняется только по двумъ правиламъ, или для одночленовъ, при чемъ дѣлитель долженъ быть написанъ въ формѣ $(a+b)^2$, или для многочленовъ, что требуетъ разложенія дѣлимаго въ форму $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Наконецъ, относительно дѣленій a на $\frac{a}{5b-c}$ или $(a+b)^3$ на $(a+b)^2$, замѣчу, что было бы дѣйствительно странно получить многочленъ при дѣленіи одночленовъ, не содержащихъ, по прежнему опредѣленію, знаковъ сложенія и вычитанія, но, вѣдь, рѣчь идетъ не объ этомъ опредѣленіи, а о новомъ, и возраженіе критика объясняется лишь тѣмъ, что выводъ изъ одного понятія онъ примѣняетъ къ другому, чего логика не разрѣшаетъ.

Дѣйствія съ явными количествами.

Какъ извѣстно, начало алгебры видятъ, обыкновенно, въ обозначеніи чиселъ буквами. Такъ, авторъ К., въ прежнихъ 22-хъ изданіяхъ своей книги, опредѣлялъ всѣ алгебраическія дѣйствія совершенно такъ же, какъ ариѳметическія, только въ примѣненіи къ буквеннымъ обозначеніямъ, и разсматривалъ свойства этихъ дѣйствій задолго до установленія понятія объ отрицательномъ числѣ. Въ моемъ учебникѣ я говорю опредѣленно: „Главное отличіе алгебры отъ ариѳметики состоитъ въ томъ, что въ ариѳметикѣ разсматриваются такъ называемыя безусловныя или абсолютныя числа, а въ алгебрѣ устанавливается новое понятіе объ условныхъ или относительныхъ числахъ“. Въ ариѳметикѣ, пере-

ходя отъ цѣлыхъ чиселъ къ дробнымъ, находятъ нужнымъ опредѣлять дѣйствія по новому. Алгебраическія опредѣленія дѣйствій устанавливаются тогда, когда отъ абсолютныхъ чиселъ переходятъ къ отрицательнымъ.

Точное опредѣленіе сложенія никѣмъ раньше не было дано. Въ началѣ алгебры я говорю: „Сложить два количества значитъ произвести отъ перваго слагаемаго тотъ прямой или обратный счетъ единицъ и долей единицы, посредствомъ котораго второе слагаемое составилось отъ нуля". Съ развитіемъ математики это опредѣленіе расширяется, теряя свои видовые признаки. Для сложеній высшихъ порядковъ оно должно быть формулировано такъ: Сложить два количества значитъ произвести надъ первымъ изъ нихъ то дѣйствіе, посредствомъ котораго второе количество составилось отъ нуля. Элементарное правило сложенія я вывожу изъ конкретной задачи: Термометръ показывалъ 20 градусовъ тепла, или холода; температура повысилась, или понизилась на 5 градусовъ. Каково новое показаніе? Наличность въ правилѣ сложенія особаго правила знаковъ составляетъ неизгладимое отличіе алгебраическаго сложенія отъ ариѳметическаго. — Опредѣленіе сложенія нѣсколькихъ количествъ дается особо, какъ дѣйствія сложнаго, состоящаго изъ послѣдовательности простыхъ. Въ теоріи сложенія отмѣчаются основныя свойства перемѣстительности и сочетательности.

Вычитаніе опредѣляется обычно, какъ дѣйствіе обратное сложенію. Но, такъ какъ упоминаемое сложеніе есть дѣйствіе новое— алгебраическое, то и вычитаніе алгебраическое нельзя отнюдь смѣшивать съ ариѳметическимъ. Правило вычитанія формулирую такъ: „Чтобы вычесть изъ одного количества другое, нужно сложить уменьшаемое съ количествомъ, равнопротивоположнымъ вычитаемому". Не распространенное еще, но важное понятіе равнопротивоположности здѣсь примѣняется умѣстно.

Точное опредѣленіе умноженія извѣстно уже давно, но до сихъ поръ оказывается, какъ я выше упоминалъ, не всѣми понятымъ и не общепринятымъ. Для началъ алгебры я суживаю его смыслъ, говоря такъ: „Перемножить два количества значитъ произвести надъ множимымъ тѣ дѣйствія дѣленія на части и повторенія слагаемымъ или вычитаемымъ, посредствомъ которыхъ множитель составленъ изъ единицы". Въ высшей математикѣ опредѣленіе должно быть расширено съ потерей ви-

довыхъ признаковъ. Тамъ оно должно быть формулировано, какъ было раньше: „Перемножить два количества значитъ произвести надъ первымъ изъ нихъ то дѣйствіе, посредствомъ котораго второе количество составилось изъ положительной единицы". Основное правило умноженія я вывожу изъ конкретной задачи: Термометръ поднимается, или опускается каждый часъ на 2 градуса, а теперь стоитъ на нулѣ. Сколько онъ будетъ показывать черезъ 5 часовъ, или сколько показывалъ 5 часовъ назадъ? Здѣсь, между прочимъ, наглядно представляется умноженіе положительнаго на отрицательное и отрицательнаго на отрицательное.—Перемноженіе нѣсколькихъ количествъ разсматривается, какъ сложное дѣйствіе, состоящее изъ послѣдовательности простыхъ. Въ теоріи умноженія доказываются важныя свойства перемѣстительности, сочетательности и распредѣлительности.

Дѣленіе опредѣляется, какъ дѣйствіе обратное умноженію. Правило дѣленія формулирую такъ: „Чтобы раздѣлить одно количество на другое, нужно умножить дѣлимое на количество обратное дѣлителю".

Такимъ образомъ, ариѳметика есть наука объ абсолютныхъ числахъ и дѣйствіяхъ только съ такими числами. Алгебра есть наука объ относительныхъ количествахъ и дѣйствіяхъ съ количествами. Число есть совокупность единицъ и долей единицы. Количество есть указатель прибавленія или отниманія единицъ и долей единицы. Число выражаетъ только размѣръ величины. Количество выражаетъ размѣръ и направленіе величины. По сходству дѣйствій надъ числами и надъ положительными количествами, можно смѣшать понятія о числѣ и о положительномъ количествѣ, но это уподобленіе понятій оправдывается только тогда, когда мы не обращаемъ существеннаго вниманія на роль количества, какъ указателя направленія.

Расширеніе понятія о числѣ въ понятіе о количествѣ влечетъ за собой расширеніе содержанія другихъ основныхъ математическихъ понятій. Такъ, расширяется содержаніе аксіомы о составѣ числа, вслѣдствіе того, что эта аксіома, примѣняемая въ ариѳметикѣ къ совокупности однородныхъ, безусловныхъ единицъ и долей, примѣняется въ алгебрѣ къ совокупности разнородныхъ, положительныхъ и отрицательныхъ, единицъ и долей. Расширяется понятіе о соотношеніи,—какъ равенствѣ, такъ и о неравенствѣ. Наконецъ, расширяется и понятіе о дѣйствіи. Изъ всего этого

видно, насколько ложно то ученіе, которое основываетъ алгебру на введеніи буквъ и считаетъ алгебраическими дѣйствіями точь въ точь прежнія ариѳметическія, совершаемыя только надъ буквенными выраженіями.

Сущность дѣйствій съ неявными количествами.

Въ прежнихъ системахъ алгебры множество логическихъ ошибокъ происходило отъ того, что не были различаемы понятія о количествѣ явномъ и неявномъ. Это различеніе пришлось установить мнѣ, а теперь оно усвоено и другими новѣйшими авторами. Если количество дано вполнѣ, т.-е. числовое значеніе и знакъ его извѣстны, то я называю его явно выраженнымъ или просто явнымъ количествомъ. Напр., $+5$, -3 суть явныя количества. Если же количество обозначено буквой или представлено выраженіемъ, въ которомъ обозначенныя дѣйствія еще не выполнены, то я называю его неявнымъ количествомъ или, попрежнему, выраженіемъ. Напр., a, $-b$, $a+5$, $b-2$ суть неявныя количества или выраженія.

Значеніе алгебраическаго дѣйствія существенно различно, смотря по тому, производится ли это дѣйствіе съ явными количествами, или съ неявными: Дѣйствіе съ явными количествами имѣетъ цѣлью окончательное составленіе результата, который выражается также явно. Напр., складывая явныя количества $+2$ и -5, находимъ явное количество -3. Дѣйствіе съ выраженіями обозначается знаками, и задача дѣйствія заключается только въ преобразованіи результата къ виду болѣе сокращенному или болѣе удобному для вычисленія. Напр., когда производимъ вычитаніе суммы въ выраженіи $a-(b+c)$, то цѣль дѣйствія состоитъ только въ уничтоженіи скобокъ, т.-е. въ преобразованіи даннаго выраженія къ виду $a-b-c$. Только къ этому отдѣлу алгебраическаго ученія относится опредѣленіе, отмѣчающее преобразованіе ряда данныхъ дѣйствій въ другія дѣйствія, которое академикъ Е. выставлялъ какъ общее опредѣленіе алгебры. Вообще же, нужно имѣть въ виду раздѣленіе алгебраическаго ученія на разнородные отдѣлы—алгебру явныхъ количествъ, алгебру выраженій и алгебру формулъ. Важно еще замѣтить, что алгебра выраженій имѣетъ небольшой, ограниченный объемъ, цѣликомъ замкнутый въ элементарномъ курсѣ. Два же другіе отдѣла подлежатъ широкому развитію, до сихъ поръ еще продолжающемуся и слишкомъ далекому отъ предполагаемаго конца.

Правило вторыхъ знаковъ.

Какъ въ алгебрѣ явныхъ количествъ исходнымъ пунктомъ ученія является условіе объ отнесенія знаковъ сложенія и вычитанія къ числамъ, прибавляемымъ и отнимаемымъ, такъ и построеніе алгебры выраженій я начинаю съ раздѣленія выраженій на прибавляемыя или положительныя и отнимаемыя или отрицательныя. Разсматривая сумму какихъ-либо количествъ $A+a$, относимъ условно знакъ дѣйствія $+$ ко второму слагаемому и принимаемъ, что данное выраженіе обозначаетъ соединеніе A съ положительнымъ выраженіемъ $+a$. Также, разсматривая разность количествъ $A-a$, относимъ условно знакъ дѣйствія — ко второму слагаемому и принимаемъ, что данное выраженіе обозначаетъ соединеніе A съ отрицательнымъ выраженіемъ $-a$. Но теперь, когда a мы считаемъ не абсолютнымъ числомъ, а количествомъ, положительность $+a$ и отрицательность $-a$ только формальная, потому что, въ окончательно упрощенномъ видѣ, какъ то, такъ и другое изъ этихъ выраженій можетъ оказаться и положительнымъ по существу, и отрицательнымъ.

Чтобы раскрыть точное значеніе положительныхъ выраженій, замѣтимъ, что, по опредѣленію алгебраическаго сложенія, имѣемъ, напр., $A+(+5)=A+5$ и, подобно этому, $A+(-5)=A-5$, откуда слѣдуетъ, по условію отнесенія знаковъ и самостоятельнаго разсмотрѣнія, какъ явныхъ, такъ и неявныхъ количествъ, что $+(+5)=+5$ и $+(-5)=-5$. Видимъ, что плюсъ, стоящій передъ обозначеніемъ количества, которое само можетъ быть положительнымъ, или отрицательнымъ, не мѣняетъ первоначальнаго знака количества, или видимъ, что $+a$ всегда обозначаетъ то же, что a. Чтобы раскрыть значеніе отрицательныхъ выраженій, замѣтимъ, что, по правилу алгебраическаго вычитанія, имѣемъ $A-(+5)=A-5$ и также $A-(-5)=A+5$, откуда, относя знаки самостоятельно, выводимъ $-(+5)=-5$ и $-(-5)=+5$. Слѣдовательно, минусъ, стоящій передъ обозначеніемъ количества, которое само можетъ быть положительно или отрицательно, всегда мѣняетъ первоначальный знакъ количества, или, говоря иначе, $-a$ обозначаетъ количество равнопротивоположное a. Указаніе, полученное предыдущимъ разсужденіемъ, можно назвать правиломъ вторыхъ знаковъ или формальныхъ знаковъ. Изъ него слѣдуетъ доказательный выводъ, что выраженія, написанныя безъ знака, должны считаться положительными и передъ ними можно ставить

плюсъ. Важное положеніе, которое я назвалъ правиломъ двойныхъ знаковъ, впервые отмѣтилъ Коши. Онъ, однако, формулировалъ его иначе и назвалъ правиломъ перемноженія знаковъ. Въ моей общей системѣ это правило является основаніемъ алгебры выраженій, рѣзко отграничивающимъ этотъ отдѣлъ отъ алгебры явныхъ количествъ. Насколько плохо оцѣнено оно составителями другихъ руководствъ, видно изъ того, что большинство авторовъ о немъ совсѣмъ не говорятъ, а другіе упоминаютъ лишь вскользь и относятъ притомъ къ алгебрѣ явныхъ количествъ, не вникая даже въ главный смыслъ того, что у меня заимствуютъ.

Синтезъ и анализъ въ теоріи дѣйствій.

Приступая къ алгебрѣ выраженій, въ которой способы выводовъ вообще просты и могутъ быть рѣзко очерчены, я начинаю пріучать учениковъ къ владѣнію самымъ важнымъ орудіемъ логическаго мышленія, къ совмѣщенію доводовъ или аргументовъ всякого разсужденія. Кстати замѣчу, что, если бы, не говорю уже, современные ученики, а многіе изъ нихъ, болѣе или менѣе авторитетныхъ руководителей, владѣли этимъ орудіемъ, въ математикѣ особо сильнымъ и вмѣстѣ доступнымъ, то въ вопросахъ этой науки споры были бы невозможны. Каждая истина точнаго знанія можетъ быть только единой въ данномъ пунктѣ развитія такого знанія. Отношеніе къ математической истинѣ можетъ заключаться только въ пониманіи или непониманіи. Но, разумѣется, все, сказанное сейчасъ, уже въ значительно меньшей степени относится къ вопросамъ систематики, педагогіи, какъ и къ вопросамъ иного рода наукъ. Тамъ факты и выводы не могутъ быть такъ рѣзко очерчены, хотя логическій принципъ совмѣщенія аргументовъ все же составляетъ сущность дѣла.

Все ученіе ариѳметики и алгебры вытекаетъ изъ двухъ аксіомъ и изъ условно составленныхъ опредѣленій основныхъ понятій. Аксіома о составѣ совокупности есть положеніе вполнѣ очевидное и безотносительное. Аксіома о равенствѣ, т.-е. о замѣнѣ одного числа другимъ, ему равнымъ, связана съ условнымъ опредѣленіемъ равенства и расширяется съ расширеніемъ понятія о немъ. Это положеніе правильнѣе считать постулатомъ, въ смыслѣ положенія, необходимость котораго сознается, несмотря на постепенное отдаленіе его въ высшихъ частяхъ математики отъ непосредственной очевидности. Упомянутый постулатъ въ элементарномъ учебникѣ я мало отмѣчаю.

Учащіеся по моимъ руководствамъ привыкаютъ съ начала ариѳметики къ отчетливому различенію такихъ понятій, какъ опредѣленіе, условіе, положеніе, слѣдствіе, правило, теорія. Въ алгебрѣ же, они начинаютъ вполнѣ отчетливо выдѣлять эти понятія въ тѣхъ совмѣщеніяхъ ихъ, какія обусловливаютъ тотъ или иной процессъ разсужденія.—Основными формами математическаго разсужденія является синтезъ, т.-е. умозаключеніе отъ даннаго, и анализъ—умозаключеніе отъ искомаго. Ариѳметика есть наука почти чистаго синтеза, въ которой анализъ проявляется лишь въ зародышевомъ его видѣ, въ видѣ, какъ было раньше упомянуто, одного шага, одного перваго импульса сознанія. Въ алгебрѣ анализъ примѣняется съ самыхъ началъ параллельно съ синтезомъ, а въ дальнѣйшемъ все больше вытѣсняетъ синтезъ, становясь здѣсь, наоборотъ, господствующимъ. Теорія алгебраическихъ, прямыхъ и обратныхъ, дѣйствій представляетъ образцовый логическій матеріалъ для различенія синтеза и анализа въ ихъ простѣйшей формѣ. Въ алгебрѣ явныхъ количествъ, синтезъ прямыхъ дѣйствій и анализъ обратныхъ разобщаются существенно. Тамъ, опредѣленія прямыхъ дѣйствій прямо указываютъ первичные способы перехода отъ данныхъ къ искомому, тогда какъ опредѣленія обратныхъ дѣйствій указываютъ условія, налагаемыя непосредственно на искомое. Въ алгебрѣ выраженій, разобщеніе синтеза и анализа развивается лишь постепенно съ повышеніемъ порядка дѣйствій. Объясняется это тѣмъ, что теорія первыхъ дѣйствій сложенія и вычитанія вполнѣ, а теорія умноженія и дѣленія отчасти—строятся на данныхъ, уже добытыхъ раньше, именно, обѣими формами умозаключеній. Образцы доказательствъ, которыя я привожу въ своемъ учебникѣ, начиная съ доказательствъ правилъ сложенія и вычитанія одночленовъ и многочленовъ, базисомъ которыхъ служитъ правило вторыхъ знаковъ, отмѣчаютъ наглядно—какъ сущность сравниваемыхъ между собою синтеза и анализа, такъ и разложеніе каждаго разсужденія на совмѣщенные въ немъ доводы. Подобная отчетливость въ изолированіи сужденій, ведущая къ пониманію ихъ въ самой глубинѣ, встрѣчается лишь случайно въ другихъ руководствахъ.

Процессъ рѣшенія уравненій.

Обыкновенно прежде, говоря о рѣшеніи даннаго уравненія, подразумѣвали подъ преобразуемымъ уравненіемъ нѣчто единое, какъ бы

постоянное. Такимъ образомъ, напр., уравненіе $\frac{2x-10}{3}=\frac{6-3x}{2}-x$, принимая послѣдовательные виды $4x-20=18-9x-6x$, $19x=38$ и, наконецъ, $x=2$, какъ бы оставалось однимъ и тѣмъ же уравненіемъ. Сообразно этому, были введены соотвѣтствующіе понятію термины, сохранившіеся до сихъ поръ. Такъ, за общій видъ уравненія первой степени принимаютъ $ax=b$ (почему не $x=m$), за общій видъ квадратнаго $ax^2+bx+c=0$. Я установилъ иной взглядъ на процессъ рѣшенія уравненій. Назвавъ уравненія, имѣющія одинаковый корень или одинаковую систему корней, совмѣстными (не однозначащими, какъ называютъ другіе), я говорю, что рѣшеніе даннаго уравненія состоитъ въ послѣдовательной замѣнѣ его другими уравненіями, простѣйшими, но совмѣстными съ даннымъ. Соотвѣтственно этому взгляду, уравненіемъ первой степени называется такое, которое, при преобразованіи его въ простѣйшія уравненія, совмѣстныя съ нимъ, содержитъ въ концѣ вычисленій только первую степень неизвѣстнаго. Уравненіемъ квадратнымъ называется всякое уравненіе, которое, посредствомъ преобразованій его въ другія, совмѣстныя съ нимъ, приводится къ виду $ax^2+bx+c=0$.

Академикъ С. находитъ предыдущія опредѣленія, во-первыхъ, непонятными, потому что я не объясняю въ нихъ, что подразумѣвается подъ простѣйшими уравненіями. Въ дѣйствительности, я даю первое опредѣленіе послѣ рѣшенія четырехъ различныхъ уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, при чемъ ученики могутъ убѣдиться, что, не по условному, а по естественному смыслу словъ, уравненіе отъ уничтоженія въ немъ дробей упрощается, отъ перенесенія неизвѣстныхъ и извѣстныхъ членовъ въ разныя части и приведенія ихъ также упрощается, отъ дѣленія на коэффиціентъ неизвѣстнаго становится окончательно рѣшеннымъ. Далѣе, тотъ же критикъ говоритъ про первое опредѣленіе: [Но оно и невѣрно, ибо, напримѣръ, уравненіе $\frac{x-2}{x-1}=\frac{x-6}{x-3}$ нельзя назвать уравненіемъ первой степени, такъ какъ при опредѣленіи изъ него точекъ пересѣченія двухъ гиперболъ необходимо считаться и съ безконечнымъ рѣшеніемъ]. Такъ какъ указанное уравненіе приводится къ виду $x^2-5x+6=x^2-7x+6$, то въ возраженіи г. С. очевиденъ прежде всего недостатокъ логики, такъ какъ возражаетъ онъ не противъ моего опредѣленія, а противъ обычнаго въ подобныхъ случаяхъ отбрасыванія члена x^2 въ обѣихъ

частяхъ уравненія. Но именно я, а до сихъ поръ, кажется, никто другой, какъ разъ и показываю ученикамъ способъ полученія въ подобныхъ уравненіяхъ безконечнаго рѣшенія. Въ главѣ объ изслѣдованіи уравненія первой степени, каковую главу критикъ, всю цѣликомъ, считаетъ образцомъ обветшалаго изложенія, я, впервые показываю методъ временнаго обобщенія изслѣдуемаго уравненія. Въ разсматриваемомъ случаѣ, ученикъ моей школы взялъ бы вмѣсто даннаго уравненія болѣе общее $ax^2-5x+6=x^2-7x+6$, привелъ бы его къ виду $(a-1)x^2+2x=0$, разложилъ бы на $x=0$ и $x=\frac{2}{1-a}$, а затѣмъ, положивъ $a=1$, вывелъ бы требуемый безконечный корень, конечно, притомъ, лишь въ томъ случаѣ, когда, по условіямъ вопроса, на этотъ корень нужно было бы обратить вниманіе. Въ той же критической статьѣ, черезъ 5 страницъ послѣ высказаннаго мнѣ возраженія, академикъ С. говоритъ: [Въ изслѣдованіи квадратнаго уравненія разсматривается случай, гдѣ $a=0$; тогда $x_2=\infty$. Въ этомъ случаѣ уравненіе перестаетъ быть квадратнымъ и безконечный корень не слѣдовало бы разсматривать]. Такимъ образомъ, то, что предписывалось на одной страницѣ, замѣняется на другой совершенно противоположнымъ предписаніемъ. Выходитъ, что раздѣленіе уравненій на уравненія первой степени и квадратныя зависитъ, въ случаѣ безконечнаго корня, только отъ личной воли критики. Замѣчу, что та манера изслѣдованія квадратнаго уравненія, которую я излагаю, именно и прилагается при изслѣдованіи направленій безконечно-удаленныхъ вѣтвей кривыхъ второго порядка.

Математическая индукція и дедукція.

Съ характерными примѣрами индуктивнаго и дедуктивнаго методовъ мышленія я нахожу возможнымъ знакомить учениковъ довольно рано. Обыкновенно, называютъ индукціей переходъ отъ частнаго къ общему. Дедукціей называютъ, обратно, переходъ отъ общаго къ частному. Не входя съ учениками въ особыя логическія тонкости, я довольствуюсь такими опредѣленіями, но ниже ихъ нѣсколько измѣню при выясненіи нѣкоторыхъ сторонъ моего учебника. Простѣйшій пріемъ чисто индуктивнаго мышленія прилагается иногда въ самыхъ основныхъ пунктахъ теоріи дѣйствій, напр., когда свойство распредѣлительности умноженія мы развиваемъ послѣдовательно отъ выраженія $(a+b)\,m$ къ болѣе сложному $(a+b+c)\,m$ и т. д., или свойство степени произведенія также

развиваемъ отъ $(AB)^n$ къ $(ABC)^n$ и далѣе. Но такое разсужденіе несущественно и представляетъ нѣкоторый интересъ лишь съ чисто логической стороны. Другимъ, болѣе характернымъ, примѣромъ отчетливой и не сложной математической индукціи является способъ Бернулли, заключенія отъ n къ $n+1$. Замѣчу, что его обычное названіе, хотя отмѣчаетъ понятіе ясно, но не совсѣмъ точно, потому что разсужденіе по этому способу состоитъ изъ частныхъ примѣровъ, составляющихъ необходимый базисъ, и изъ условной теоремы, которая одна соотвѣтствуетъ названію, тогда какъ весь способъ требуетъ совмѣщенія обѣихъ частей. Разсужденіе по указанному способу я прилагаю къ перемноженію двучленовъ, имѣющихъ общій членъ, и къ возведенію многочленовъ въ квадратъ и въ кубъ, при чемъ, въ интересахъ ясности, отчетливо выдѣляю обѣ части разсужденія и ихъ совмѣщеніе въ общее заключеніе.—Типичнымъ примѣромъ математической дедукціи слѣдуетъ считать способъ Декарта, неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, какъ называютъ обыкновенно, или, точнѣе, опредѣляемыхъ коэффиціентовъ. Этотъ способъ, въ виду очевидности его обоснованія при сравненіи конечныхъ многочленовъ, я позволяю себѣ примѣнить къ дѣленію многочлена $Ax^n+Bx^{n-1}+\dots+Mx+N$ на двучленъ $x\mp a$. Въ дальнѣйшемъ я прилагаю чисто дедуктивный методъ разсужденія къ извлеченію квадратныхъ и кубичныхъ корней изъ чиселъ и многочленовъ. Такое примѣненіе имѣетъ уже видъ довольно сильно развитого, спеціально математическаго, анализа.

Вполнѣ сознавая, что рядъ моихъ замѣтокъ можетъ утомить читателя и что я могу продолжить его въ случаѣ надобности въ будущемъ, ограничусь разсмотрѣніемъ еще только двухъ деталей моего учебника. Это, во-первыхъ, упрощенная, почти до механичности мышленія, индукція въ составленіи уравненій, и во-вторыхъ приведенная къ той же механической простотѣ дедукція въ чтеніи математическихъ формулъ, выражающихъ содержаніе довольно сложныхъ вопросовъ. Переходя теперь къ этимъ деталямъ книги, я измѣняю обычныя опредѣленія разсмотрѣнныхъ только что пріемовъ мышленія, сказавъ, что индукція есть совмѣщеніе частностей для установленія общаго, а дедукція есть разложеніе общаго на заключенныя въ немъ частности. Именно въ такой формѣ представится, какъ я думаю, читателю принципъ составленія уравненій и типичный методъ математическаго чтенія формулъ, разрѣшающихъ спеціальные вопросы.

Принципъ составленія уравненій.

Составленіе уравненій по условіямъ задачъ всегда считалось нелегкимъ дѣломъ, требующимъ продолжительнаго навыка и довольно развитыхъ способностей учениковъ. Особо способные ученики умѣли изрѣдка находить варіанты способовъ рѣшенія задачъ. Принципъ составленія требуемаго въ данной задачѣ уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ формулировали неуклонно въ такомъ видѣ: Чтобы составить уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, нужно обозначить это неизвѣстное буквой x и продѣлать надъ нимъ тѣ дѣйствія, которыя нужны для повѣрки данной задачи. Замѣтимъ, однако, что въ задачахъ, требующихъ составленія уравненія, хотя и указывается обыкновенно одно неизвѣстное, но всегда подразумѣваются нѣсколько таковыхъ, и иногда то, которое указывается, неудобно принимать за главное, черезъ каковое слѣдуетъ выражать другія неизвѣстныя. Съ другой стороны, если выписанное выше указаніе перевести на обыкновенный языкъ, то оно представитъ не иную формулировку, какъ такую: Чтобы составить уравненіе, нужно его составить. Въ самомъ дѣлѣ, вѣдь, для того, чтобы повѣрить данную задачу, нужно совмѣстить до конца всѣ частныя условія задачи. Но то же самое совмѣщеніе требуется и для возможности составленія уравненія.

Я выражаю принципъ составленія уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ гораздо болѣе многословно, чѣмъ это принято всѣми, и даже разбиваю указаніе на четыре отдѣльныя рубрики. Чтобы составить уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, говорю я, нужно: 1) „Выбрать между неизвѣстными, которыя въ задачѣ или прямо указываются, или подразумѣваются, какое-нибудь одно, принимаемое за первое и обозначить это неизвѣстное какой-нибудь буквой, напр., x. 2) Посредствомъ этого обозначенія и обозначеній, данныхъ въ задачѣ, выражать всѣ величины, о которыхъ въ задачѣ прямо говорится, или которыя подразумѣваются. 3) При составленіи такихъ выраженій наблюдать, чтобы постепенно принимались во вниманіе всѣ данныя въ задачѣ числа и всѣ, относящіяся къ даннымъ или къ неизвѣстнымъ величинамъ, условія. 4) Послѣ примѣненія всѣхъ условій, разыскать между составленными или просто записанными выраженіями два такихъ, которыя, вслѣдствіе одного изъ данныхъ условій, должны быть равны между собою, и соединить эти выраженія знакомъ равенства“.—Обыкновенно, можно принимать любое изъ неизвѣст-

ныхъ въ задачѣ за первое. Можно, также, очень разнообразно измѣнять порядокъ примѣненія условій.—Разсмотримъ, напр., задачу: Въ одномъ кошелькѣ вдвое меньше монетъ, чѣмъ въ другомъ, а, если выложить изъ перваго 3 монеты и во второй прибавить 8 монетъ, то число монетъ въ первомъ окажется въ 4 раза меньше, чѣмъ во второмъ. Сколько монетъ въ каждомъ кошелькѣ?—Если x есть число монетъ перваго кошелька, то рядъ записываемыхъ величинъ, нѣсколько сокращенный, будетъ x, $2x$, $x—3$, $2x+8$, 4 и уравненіе $2x+8=4(x—3)$.—Если y обозначитъ число монетъ второго кошелька, то рядъ величинъ окажется y, $\frac{y}{2}$, $y+8$, $\frac{y}{2}—3$, 4 и уравненіе можно написать въ видѣ $\frac{y+8}{4}=\frac{y}{2}—3$. Если выберемъ за первое неизвѣстное z измѣненное число монетъ перваго кошелька и обратимъ сначала вниманіе на второе отношеніе чиселъ монетъ, то составимъ рядъ величинъ z, $4z$, $z+3$, $4z—8$, 2 и уравненіе $4z—8=2(z+3)$.—Если первымъ неизвѣстнымъ u выберемъ измѣненное число монетъ второго кошелька, а первымъ условіемъ второе отношеніе чиселъ монетъ, то выйдетъ рядъ величинъ u, $\frac{u}{4}$ $u—8$, $\frac{u}{4}+3$, 2 и уравненіе можно представить въ видѣ $\frac{u}{4}+3=\frac{u—8}{2}$. Такимъ образомъ, отмѣченная мною формулировка принципа вводитъ въ дѣло составленія уравненій совершенно опредѣленный и всецѣло соотвѣтствующій этому дѣлу индуктивный процессъ мышленія. При этомъ, сознанію открывается множество легко различимыхъ и подлежащихъ личному выбору путей достиженія цѣли.

Пріемъ дедуктивнаго разложенія формулъ.

Извлеченіе квадратныхъ и кубичныхъ корней изъ цѣлыхъ чиселъ и многочленовъ объясняютъ обыкновенно многословными разсужденіями, аргументы которыхъ въ словесной рѣчи не выдѣляются съ достаточной простотой и отчетливостью. Въ умахъ учениковъ отпечатлѣваются, конечно, соотвѣтствующія дѣлу, сравненія разнообразныхъ чиселъ и выраженій, но принятой манерой разсужденія ученики отстраняются далеко отъ идеи замѣнить отвлеченное мышленіе нагляднымъ разборомъ выписываемыхъ и преобразуемыхъ формулъ.—Займемся вопросомъ объ извлеченіи квадратнаго корня изъ какого-нибудь четырехзначнаго числа. Пусть,

напр., требуется извлечь $\sqrt{2222}$. Зная, что ближайшимъ полнымъ квадратомъ къ данному числу, которое можетъ оказаться неполнымъ, долженъ быть квадратъ двузначнаго числа, обозначимъ послѣднее въ видѣ $10x+y$. Тогда, по опредѣленію квадратнаго корня и теоремѣ о составѣ квадрата двузначнаго числа, выразимъ всѣ условія вопроса одной формулой $2222=100x^2+2.10xy+y^2+R$, гдѣ R есть возможный остатокъ. Усматривая здѣсь значительный численный перевѣсъ перваго слагаемаго второй части надъ всѣми остальными, составляемъ приблизительное равенство $2222(=)100x^2$, упрощаемъ его въ форму $22{,}22(=)x^2$ и рѣшаемъ цѣлымъ числомъ. Особыми соображеніями доказываемъ, что полученное рѣшеніе окажется и для общей формулы истиннымъ. Затѣмъ, вслѣдствіе отысканія одного изъ неизвѣстныхъ, составляемъ новую формулу $622=2.10.4y+y^2+R$, замѣняемъ и ее приблизительнымъ равенствомъ $622(=)2.10.4y$ или упрощеннымъ $62{,}2(=)2.4y$ и рѣшаемъ его, какъ прежнее, цѣлымъ числомъ. Наконецъ, осмысливаемъ нужную повѣрку на основаніи свойствъ системы счисленія и дѣйствій съ числами. Объясненный пріемъ дедукціи, посредствомъ разложенія общей формулы на частныя, знакомитъ уже изучающихъ математику съ методомъ самихъ математическихъ изслѣдованій. Привыкнувшимъ къ внимательному чтенію формулъ и выраженій не покажется невозможнымъ найти самостоятельно способъ извлеченія кубичныхъ корней изъ чиселъ и также совершенно естественно раскрыть то упрощеніе повѣрки находимыхъ цифръ такого корня, которое, несмотря на все соотвѣтствіе его системѣ счисленія и правиламъ дѣйствій и на крайнюю простоту, изложено, повидимому, впервые въ моемъ учебникѣ.

Академикъ С., касаясь моего изложенія понятій о квадратныхъ корняхъ изъ чиселъ и о числахъ несоизмѣримыхъ, говоритъ: [Написавъ рядъ квадратовъ натуральныхъ чиселъ, авторъ сейчасъ же спѣшитъ прибавить, что числа этого ряда называются полными квадратами, а числа, не входящія въ этотъ рядъ, неполными квадратами.... Не проще ли и не правильнѣе ли различать въ натуральномъ ряду квадраты и не квадраты? Показавъ затѣмъ, что число 60 не можетъ быть квадратомъ дроби, авторъ сейчасъ же заявляетъ: „квадратные корни изъ неполныхъ квадратовъ представляютъ такъ называемыя несоизмѣримыя съ единицей числа". Названіе дано; а могутъ ли существовать такія числа и почему ихъ можно назвать числами, спросятъ ученики и

не найдутъ въ учебникѣ удовлетворительнаго отвѣта, ни въ I, ни во II части]. Въ дѣйствительности, ученики знакомы уже съ терминами „неполное вычитаніе“, „неполное дѣленіе“, видѣли раньше какъ, для производства этихъ дѣйствій, вводились новыя числа, не заключавшіяся въ рядѣ прежнихъ, при чемъ результаты такихъ дѣйствій назывались числами только по ихъ происхожденію отъ чиселъ, безъ отношенія къ способамъ составленія и понятію о неравенствѣ, и не увидятъ, конечно, ничего невозможнаго въ вопросѣ о нахожденіи новыхъ чиселъ при извлеченіи корней.

Числа $\sqrt{2}$ или $\sqrt{60}$ они признаютъ существующими потому уже, что они отличаются вполнѣ опредѣленнымъ, хотя и не изслѣдованнымъ числовымъ признакомъ, первое отъ $\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, а второе отъ $\sqrt{59}$, $\sqrt{61}$ и т. под.. Не зная ни свойствъ этихъ чиселъ, ни опредѣленій дѣйствій съ ними, ученики будутъ убѣждены, что базисомъ новой теоріи должны служить опредѣленія самихъ чиселъ $(\sqrt{2})^2=2$, $(\sqrt{60})^2=60$ и т. под.. Такъ какъ опредѣленія понятій всегда устанавливаются условно, то оспаривать ихъ немыслимо, а можно только ожидать рѣшенія вопроса о томъ, разовьется ли изъ принятаго опредѣленія доступная здравому смыслу теорія, или таковая окажется невозможной.

Продолжая возраженія, г. С. заявляетъ: [Такой крупный ученый педагогъ, какъ Jules Tannery, говоритъ объ ирраціональныхъ числахъ: ces nombres sont, comme on le verra, une façon de parler plutôt qu'une realité. Опредѣливъ по Дедекинду значеніе $\sqrt{2}$, французскій авторъ пишетъ: Bien entendu, il n'est pas actuellement permis de dire, que le carré de se nombre soit egal à 2: on n'a pas encore dit ce qu'etait le carré d'un nombre irrationel. А русскій авторъ, найдя такое натуральное число n, что $n^2<N<(n+1)^2$, смѣло пишетъ $\sqrt{N}=n+r$ и изъ неравенства $\sqrt{N}<n+\frac{1}{2}$ заключаетъ $N<n^2+n+\frac{1}{4}$.]

Возраженіе высказано съ особымъ апломбомъ, казалось бы, требующимъ соотвѣтствующаго аргументальнаго вѣса. Однако, сущность этого возраженія въ одномъ лишь смѣшеніи не только логическихъ понятій, но, что особенно странно, даже процессовъ математическаго мышленія. Нельзя же, въ самомъ дѣлѣ, отождествлять свойства моего, чисто аналитическаго, опредѣленія несоизмѣримаго квадратнаго корня со свойствами опредѣленія Дедекинда,

чисто синтетическаго, и на томъ основаніи, что синтезъ требуетъ опоры въ предпосылкахъ его, ожидать того же отъ анализа, который находитъ не менѣе прочную опору, однако лишь въ своемъ развитіи. Слѣдовало бы понимать, что вообще все, соотвѣтствующее одному изъ этихъ опредѣленій, не свойственно другому, взаимно. Вѣдь, при подобной односторонности исключительно синтетическихъ сужденій, было бы неизбѣжно, при рѣшеніи всякаго новаго уравненія, предварительно знать всѣ свойства его неизвѣстнаго и свойства дѣйствій съ нимъ. Если бы такъ думали всѣ математики, то не существовали бы ни высшая алгебра, ни теорія интегрированія уравненій, да и весь высшій математическій анализъ не получилъ бы такого, не подходящаго ему, названія. Возвращаясь, однако, къ сущности разбираемаго элементарнаго вопроса, замѣчу еще, что ученики моей школы, не имѣя поводовъ отвергать аналитическое опредѣленіе и зная уже, въ этомъ періодѣ обученія, числовое выраженіе теоремы Пиѳагора, не повѣрятъ, какъ русскому, такъ и французскому авторитету, ни въ томъ, что $\sqrt{2}$ нельзя возводить въ квадратъ по данному для этого числа опредѣленію, которое въ томъ и состоитъ, что $(\sqrt{2})^2=2$, ни тому, что разсматриваемое число, выражающее отношеніе діагонали квадрата къ его сторонѣ, представляетъ скорѣе „способъ словеснаго выраженія“, чѣмъ сознаваемую умомъ и представляемую геометрически реальность. Не повѣрятъ мыслящіе ученики и тому, что $\sqrt{2}$ можетъ считаться бо́льшимъ или равнымъ $\sqrt{60}$ и что установленіе истиннаго взгляда на неравенство этихъ чиселъ зависитъ отъ болѣе или менѣе капризнаго полюбовнаго соглашенія ученыхъ.

Критика учебника алгебры.

Приступая къ разбору первой части учебника алгебры, предсѣдатель Уч. Ком. Мин. Нар. Просв., академикъ С. начинаетъ съ самаго заголовка книги, съ ея оберточнаго листа. Его возмущаетъ то обстоятельство, что на этомъ листѣ указано 8-е изданіе, перепечатанное безъ измѣненія съ 4-го, и онъ восклицаетъ: [Для чего авторъ счелъ нужнымъ сдѣлать такую отмѣтку на новомъ изданіи? Одно изъ двухъ: или авторъ считаетъ свой учебникъ до-

веденнымъ въ четвертомъ изданіи до извѣстной степени совершенства и потому не нуждающимся въ пересмотрѣ и улучшеніи, или онъ махнулъ рукой на свое дѣтище, признавъ его неисправимымъ и предоставивъ ему влачить свое существованіе, пока находятся покупатели]. Замѣчу на это, во-первыхъ, что и въ самомъ дѣлѣ, я считаю свой учебникъ, особенно въ первой его части, доведеннымъ до наличнаго совершенства. Единственно, что я признаю нужнымъ, это — изложить нѣкоторые отдѣлы болѣе простымъ и распространеннымъ языкомъ, и надѣюсь это сдѣлать въ недалекомъ будущемъ. Во-вторыхъ, напомню читателю факты: то самое руководство ариѳметики, изложеніе котораго признавалось Уч. Ком. образцовымъ, рекомендуемымъ, было впослѣдствіи запрещено; тотъ самый учебникъ алгебры, который въ четвертомъ изданіи былъ одобренъ какъ руководство, оказался, даже въ перепечаткѣ его безъ всякихъ измѣненій, также запрещеннымъ. По нѣкоторымъ даннымъ, мною своевременно учтеннымъ, я предвидѣлъ такое, въ существѣ лично пристрастное, а по формѣ безконтрольно искажаемое отношеніе къ моимъ книгамъ, и не хотѣлъ пока давать опору такому отношенію, даже малѣйшими измѣненіями того, что было раньше высоко оцѣнено.

Безотвѣтственный въ дѣлѣ казенной апробаціи учебныхъ книгъ, предсѣдатель Комитета продолжаетъ затѣмъ: [Нерѣдко бываетъ нуженъ довольно сильный стимулъ въ видѣ условнаго допущенія къ школьному употребленію учебника въ одномъ изъ послѣдующихъ изданій,—что равносильно угрозѣ недопущенія новаго изданія,—чтобы наконецъ авторъ удосужился пересмотрѣть, выправить и освѣжить свой трудъ]. Подобное заявленіе въ рецензіи моей книги совершенно неумѣстно. Вѣдь, критикъ знаетъ, что пристрастная и мало грамотная рецензія второй части этой книги, выполненная профессоромъ К., не заставила меня признать указанныя имъ поправки, кромѣ двухъ, вѣрно отмѣченныхъ, недосмотровъ. Я не разъ уже показывалъ, что больше дорожу своей научной совѣстью и несомнѣнной, хотя пока для меня, своей исторической ролью, чѣмъ благоволеніемъ Комитета и вытекающей изъ этого доходностью книгъ. Пока мнѣ не укажутъ дѣйствительно полезныхъ въ научномъ или педагогическомъ смыслѣ улучшеній, буду продолжать тѣ же изданія, все же расходящіяся, хотя въ небольшомъ числѣ экземпляровъ, и вліяющія благотворно на ходъ преподаванія.

Столь же, по моему, неумѣстно, г. С. заявляетъ: [Въ наше время, когда на разныхъ языкахъ существуетъ множество учебниковъ по всѣмъ предметамъ, каждый учебникъ будетъ неизбѣжно въ большей своей части компилятивнымъ, — все равно, назоветъ ли авторъ тѣ пособія, которыми онъ пользовался, или скромно (?) умолчитъ объ этомъ....] Насколько мои труды компилятивны, читатель видитъ самъ, между прочимъ, по тѣмъ отмѣткамъ ихъ отличія отъ другихъ, которыя указаны мною въ предшествующихъ главахъ. Кромѣ того, вопросъ объ этомъ рѣшитъ впослѣдствіи исторія математической литературы.

Развивая вышеотмѣченный взглядъ на характеръ учебниковъ, академикъ С. продолжаетъ: [Поэтому нельзя непремѣнно требовать отъ учебника оригинальныхъ мыслей и пріемовъ; оригинальность свойственна таланту и можетъ проявиться въ научныхъ (?) работахъ; оригинальничанье же, даже и въ небольшомъ количествѣ, довольно противно]. Подобныя предпосылки рецензіи, еще не начатой и, какъ увидимъ, нисколько не оправдывающей ея вступительнаго тона, вынуждаютъ и меня заговорить инымъ, чѣмъ я желалъ бы, языкомъ. Во всякомъ случаѣ, то, что я выскажу, будетъ основано не на втираніи очковъ читателю, а на ясныхъ и, полагаю, безспорныхъ доказательствахъ.

Рѣшивъ разнести окончательно учебникъ алгебры, офиціальные критики распредѣлили свой трудъ по обѣимъ частямъ его и выступили въ разныхъ роляхъ, дополняющихъ одна другую. Профессоръ К., авторъ невозможнаго вычитанія и каллиграфическаго опроверженія опредѣленія Коши, оказался тонкимъ знатокомъ математики. Академикъ С., логика котораго, какъ мы видѣли, имѣетъ особую способность мѣняться съ переходомъ отъ одной страницы разсужденія къ другой и примѣнять выводы одного понятія къ другому, взялся за роль учителя словесности и самаго элементарнаго пропедевта. Однако, начали они свою критику сразу несогласно: Г. К. съ первыхъ словъ заявилъ: [Учебникъ г. Ш. написанъ простымъ и яснымъ языкомъ, но къ сожалѣнію не свободенъ отъ погрѣшностей, изъ которыхъ нѣкоторыя представляются существенными]. Академикъ С., наоборотъ, не указываетъ почти никакихъ научныхъ погрѣшностей, но въ каждой фразѣ книги видитъ неумѣнье съ моей стороны правильно по-русски выражаться и находитъ всѣ мои объясненія совершенно непонятными для учениковъ, говоря, напр., такъ: [Если уже изъ изложеннаго можно

видѣть, что авторъ не обладаетъ умѣньемъ ясно и точно выражаться и чувствуетъ какое-то особое пристрастіе ко введенію совершенно не нужныхъ терминовъ, то можно ожидать, что при выясненіи дѣйствительно трудныхъ понятій онъ потратитъ много словъ, но едва ли будетъ въ силахъ внушить ясныя и точныя представленія].

Настоящую главу я посвящу оцѣнкѣ русско-литературной и пропедевтической критики академика С.. Научные взгляды профессора К. будутъ короче и ярче оцѣнены при совмѣщеніи ихъ въ сферѣ алгебры и тригонометріи. Итакъ, читатель, отвлечемся на время отъ научной математики. Предлагаю Вамъ стать на точку зрѣнія стилиста словесника и учителя дѣтей младшаго возраста.

Первое литературное обвиненіе, предъявляемое мнѣ, состоитъ въ томъ, что въ наименованіяхъ числитель, знаменатель, множитель, дѣлитель я уподобляю винительный падежъ не именительному, а родительному, говоря, напр., „умножить числителя", а не числитель и т. под.. Высказавъ это обвиненіе, г. С. добавляетъ: [Къ нашему удивленію, такой выдающійся знатокъ русскаго языка, какъ покойный профессоръ Буслаевъ, въ своемъ учебникѣ грамматики, исходя изъ соображеній о значеніи суффикса тель, рекомендуетъ говорить: умножить числителя на знаменателя]. Итакъ, прежде всего, въ вопросѣ грамматическихъ правилъ, академикъ математики опровергаетъ имъ самимъ признаваемаго ученаго словесника. Я признаю свою вину въ томъ, что поступаю по указанію г. Буслаева, считая въ данномъ вопросѣ его мнѣніе болѣе авторитетнымъ. Сверхъ того, прибавлю отъ себя слѣдующее соображеніе: Если вообще принято въ словахъ съ суффиксомъ тель иногда уподоблять винительный падежъ именительному, говоря, напр., составить указатель, купить путеводитель, иногда же родительному, говоря — позвать служителя, слушать учителя, то въ математикѣ нужно избрать тотъ способъ выраженія, который обусловливаетъ полную опредѣленность и точность рѣчи. Предлагаю г. критику разобрать сказанную на его языкѣ фразу: „при преобразованіи двухъ дробей числитель первой замѣняетъ знаменатель второй". Въ русской рѣчи очень часто упоминаютъ дополненіе раньше подлежащаго, а въ виду этого предыдущая фраза вполнѣ неопредѣленна, такъ какъ читающему ее невозможно рѣшить, „числителя ли первой дроби замѣняетъ знаменатель второй, или числитель первой замѣняетъ знаменателя второй". Въ точной

рѣчи подобная двойственность заключенія недопустима. Полагаю, что спеціалистъ словесности, дѣлая свое указаніе, понималъ подобныя требованія ясной рѣчи, а спеціалистъ математики долженъ былъ бы еще скорѣе заботиться о томъ же.

Высказавъ предыдущее обвиненіе, г. С. начинаетъ подробный разборъ первыхъ страницъ учебника. Въ первомъ пунктѣ моего введенія я говорю: „При рѣшеніи вопросовъ о числахъ полезно иногда обозначать числа не цифрами, а буквами". Критикъ возражаетъ на это: [Ученику извѣстно, что при десятичной системѣ счисленія только девять первыхъ натуральныхъ чиселъ обозначаются особыми цифрами, съ прибавленіемъ къ которымъ нуля и еще двухъ знаковъ черты и запятой... въ ариѳметикѣ выражаются письменно всѣ цѣлыя и дробныя числа. Слѣдуя способу выраженій автора, ученикъ можетъ сказать, что въ русскомъ языкѣ всѣ слова обозначаются буквами, что едва ли одобритъ учитель русскаго языка]. Съ своей стороны, думаю, что только преподаватель китайскаго языка могъ бы извлечь изъ процитированной моей рѣчи указаніе на обозначеніе каждаго числа особой цифрой, какъ и каждаго слова одной буквой. Въ русскомъ языкѣ выраженія „обозначаются цифрами" однозначуще съ выраженіемъ „обозначаются посредствомъ цифръ". Едва ли, напр., неправильно сказать, что нѣмецкія слова часто обозначаютъ латинскими буквами. Очевидно, самъ критикъ чувствовалъ не полную законность своего вывода, такъ какъ для подкрѣпленія его прибавилъ къ моей рѣчи несодержащееся въ ней слово „особыми".

Начиная въ своемъ учебникѣ разъяснять пользу введенія буквъ, я указываю нѣсколько четныхъ чиселъ, именно, 2, 14, 36, 8 и, заявивъ, что чиселъ такихъ безчисленное множество, составляю ихъ общее выраженіе $2a$, полагая a цѣлымъ числомъ. Также указываю нѣсколько чиселъ, дѣлящихся на 3 съ остаткомъ 2, какъ-то 11, 5, 32, 47 и даю общее выраженіе $3a+2$, опять при a цѣломъ. Г. С. упрекаетъ меня въ томъ, что я этимъ показываю расширеніе или обобщеніе понятія, не объяснивъ ученикамъ, что значитъ „расширить или обобщить", а въ приведенныхъ двухъ примѣрахъ онъ никакого обобщенія не признаетъ. Сожалѣю, что на этотъ разъ не дана поправка моей рѣчи по способу самого г. С.. Кажется, всякому должно быть ясно, что переходъ отъ частныхъ примѣровъ четныхъ чиселъ къ выраженію $2a$ есть обобщеніе, и, думаю, самъ критикъ называетъ указанное выраженіе общимъ

видомъ любого четнаго числа. При упомянутомъ переходѣ частные признаки отдѣльныхъ чиселъ 2, 14, 36, 8 утрачиваются, а это и есть признакъ расширенія понятія или обобщенія.—Далѣе, опираясь на то обстоятельство, что произведеніе $2a$ я написалъ безъ точки умноженія, г. С. находитъ, что ученики будутъ читать написанное выраженіе не какъ два a, а двадцать a. Полагаю, однако, что для этого ученики должны быть особо выдрессированы со стороны усвоенія десятичной системы, да кромѣ того въ учебникѣ, какъ мой, повторительномъ, догматическомъ, подобный недосмотръ вообще не могъ бы привести къ недоразумѣнію.

Въ пунктѣ третьемъ введенія я говорю: „Обозначеніе чиселъ буквами позволяетъ наглядно выражать общія свойства чиселъ и дѣйствій съ ними. По мнѣнію г. С., въ моихъ словахъ проявляется не хорошій русскій языкъ, такъ какъ слѣдуетъ говорить: дѣйствія надъ числами, а не съ числами. Критикъ даже особо издѣвается надъ такой рѣчью, придумывая фразы съ двукратнымъ повтореніемъ съ, какъ то: [Мы изучаемъ съ ученицами дѣйствія съ дробями] и т. под.. Замѣчу, что, хотя и не благозвучны подобныя, нарочно придуманныя, сочетанія словъ, все же суть дѣла въ томъ, что говорить по способу г. С. можно было раньше, при не отчетливомъ представленіи о математическомъ дѣйствіи, при точномъ же пониманіи смысла дѣйствія нужно выражаться по моему. Въ примѣрахъ дѣйствій $6+2$, $6-2$, 6.2, $6:2$, можно говорить, что дѣйствія производятся съ числами 6 и 2, понимая, что оба эти числа считаются данными. Но, употребляя предлогъ надъ, нужно понимать, что во всѣхъ указанныхъ выраженіяхъ дѣйствія производятся надъ однимъ числомъ 6, второе же число 2 указываетъ, вмѣстѣ со знакомъ, самый характеръ дѣйствія. Обратно, въ выраженіяхъ $2+6$ и 2.6 дѣйствія производятся надъ числомъ 2, а характеризуются знакомъ и числомъ 6. Наконецъ, понимая $6-2$ и $6:2$, какъ сравненія, разностное и кратное, опять таки правильнѣе говорить, что эти сравненія производятся съ числами 6 и 2, а не надъ этими числами. Дифференціальное исчисленіе прекрасно оттѣняетъ ту же точность различенія понятій, указывая, что функція x^m, въ которой операція производится надъ однимъ основаніемъ, имѣетъ производную mx^{m-1}, а функція m^x, въ которой операція производится надъ показателемъ, даетъ совсѣмъ другую производную $m^x \mathrm{Lg} m$. Функцію же $\varphi(x)^{\psi(x)}$, въ которой дѣйствіе, дѣйствительно, выполняется надъ обоими числами сразу, то же

дифференціальное исчисленіе ясно отмѣчаетъ, какъ исключительную, для которой и производную нужно искать косвеннымъ путемъ.

Въ томъ же пунктѣ своихъ возраженій, г. С. поучаетъ меня, что нужно принимать условіе $a+0=a$, какъ и другія относительно дѣйствій съ нулемъ, потому что [въ ариѳметикѣ нуль не считается числомъ]. Критикъ, какъ и многіе другіе, не считаетъ нуль числомъ, судя же по раньше сказанному, не считаетъ и цифрой, а просто отдѣльнымъ знакомъ, что однако не мѣшаетъ ему складывать отвлеченное число съ такимъ графическомъ объектомъ. Онъ также долженъ считать вычитаніе, при равенствѣ двухъ данныхъ чиселъ, невозможнымъ, потому что, ожидая всегда при вычитаніи получить число, мы въ этомъ случаѣ таковаго не получаемъ, и вообще понятна солидарность критика съ профессоромъ К.. Академику, между прочимъ, нравится сравненіе, сдѣланное Гессе, нуля съ Мефистофелемъ [который одни законы признаетъ, а другіе отвергаетъ], и, упомянувъ объ этомъ, онъ укоряетъ меня за то, что я держусь другого взгляда. Дѣйствительно, у меня по этому поводу иное мнѣніе, хотя я не прочь согласиться, что только Мефистофель сумѣлъ бы объяснить соединеніе умственной абстракціи съ графическимъ знакомъ и ухитрялся бы доводить мыслителей до признанія, что вычитаніе $5-5$ невозможно.

Въ пунктѣ IV введенія у меня сказано: Обозначеніе чиселъ буквами облегчаетъ доказательство теоремъ о числахъ и изслѣдованіе свойствъ чиселъ. Г. С. заявляетъ, что слово теорема объясняютъ лишь въ четвертомъ классѣ въ курсѣ геометріи. Этимъ констатируется фактъ, что въ системѣ обученія, направляемаго Уч. Ком. Мин. Нар. Просв., всю ариѳметику и часть алгебры объясняютъ безъ всякаго упоминанія о томъ, что такое математическая теорема, а, слѣдовательно, и безъ всякаго логическаго обоснованія свойствъ чиселъ и дѣйствій съ ними. Я же съ своей стороны признаю, что ученики способны не только зубрить правила, но и понимать ихъ логическое обоснованіе, а въ виду этого объясняю понятіе о теоремѣ въ самыхъ началахъ ариѳметики.

Въ разсматриваемомъ пунктѣ моего введенія я, для разъясненія того, какъ употребленіе буквъ упрощаетъ, конечно, съ внѣшней стороны, доказательство теоремъ, вывожу изъ пропорціи $a-b=c-d$ ея общее свойство суммы среднихъ и крайнихъ, чѣмъ, между прочимъ, навожу учениковъ на идею перенесенія членовъ равенства изъ одной части въ другую. Г. С. дѣлаетъ изъ этого и изъ упо-

минанія въ значительно дальнѣйшемъ, именно, въ теоріи равенствъ, о такомъ же доказательствѣ возможности перестановки членовъ, что къ разностной пропорціи, изгнанной Уч. Ком. изъ ариѳметики, я чувствую [влеченье, родъ недуга]. Читателю достаточно сравнить это заявленіе съ тѣмъ обстоятельствомъ, что, фактически, я гораздо раньше освободилъ ариѳметику не только отъ разностной, но и отъ кратной пропорціи, и своими пріемами рѣшенія задачъ вызываю, конечно, со стороны учениковъ естественную антипатію къ пропорціямъ, какъ совершенно лишнему въ ариѳметикѣ балласту. Очевидно, г. С. моей ариѳметики вовсе не читалъ. Однако, она, подъ его предсѣдательскимъ направленіемъ критики въ Комитетѣ, запрещена одновременно съ алгеброй.

Въ томъ же пунктѣ я отыскиваю двузначное число $10x+y$ подъ нѣкоторымъ простымъ условіемъ и прихожу къ равенству $x-y=1$, показывающему, что въ искомомъ числѣ число десятковъ должно быть на единицу больше числа простыхъ единицъ. Рецензентъ, заявляя правильно, что я даю неопредѣленное уравненіе, находитъ, что это для учениковъ слишкомъ преждевременно, т.-е., значитъ, что подыскиваніе чиселъ 2 и 1, 3 и 2 и т. д., до 9 и 8, для начинающихъ алгебру и уже изучившихъ всю ариѳметику, недоступно. Въ пунктѣ же второмъ, упрекая меня за то, что я упоминаю о безчисленномъ множествѣ четныхъ чиселъ, тотъ же критикъ говоритъ: [казалось бы, понятіе о „безчисленномъ множествѣ" нельзя считать прирожденнымъ, и потому автору необходимо было или опредѣлить его или обойтись безъ него.... Ученикъ можетъ разсудить, что изъ каждаго цѣлаго числа получается четное: поэтому четныхъ чиселъ столько же, сколько цѣлыхъ; но четныя числа составляютъ часть цѣлыхъ, чередуясь въ натуральномъ ряду съ нечетными]. Изъ первыхъ словъ критика видно, что онъ не имѣлъ бы ничего противъ того, чтобы понятіе о безконечности было опредѣлено (какъ,—нужно его спросить) на первыхъ строкахъ алгебры. Но логика г. С., перевертывающаяся, какъ мы видѣли, вообще со страницы на страницу, на этотъ разъ дѣлаетъ свою эволюцію на протяженіи близкихъ между собою, вышеуказанныхъ, строкъ его возраженія. Вѣдь, если ученики, хотя и не способные рѣшить, въ предѣлахъ перваго десятка, ур-іе $x-y=1$, но разсуждающіе съ Бертрановскимъ остроуміемъ о безконечностяхъ разныхъ комплексовъ, выразятъ свой остроумный выводъ математическими знаками, то они, какъ разъ, и раскроютъ

математическое понятіе о безконечности, какъ о числѣ не опредѣленномъ, удовлетворяющемъ равенству $\frac{\infty}{2} = \infty$ и ему подобнымъ. Въ трогательной заботѣ объ интересахъ учениковъ, г. С. лучше желаетъ, чтобы они понимали „безчисленное множество" въ смыслѣ гнѣвной мамаши, твердящей своему шаловливому сынку: [я тебѣ безчисленное множество разъ повторяла, чтобы ты сидѣлъ смирно]. Съ этимъ пожеланіемъ для началъ алгебры и я соглашаюсь. Не могу только не замѣтить, что, упрекая меня въ употребленіи даже лишнихъ, по его мнѣнію, но отдѣльныхъ, словъ, критикъ самъ даетъ примѣръ болѣе развѣтвленнаго излишества въ своихъ дополнительныхъ указаніяхъ.

Разбирая пункты V и VI введенія, поясняющіе, что обозначеніе чиселъ буквами ведетъ къ обобщенію выводныхъ задачъ, рѣшаемыхъ прямыми разсужденіями отъ данныхъ чиселъ и то же обозначеніе упрощаетъ рѣшеніе разборныхъ задачъ, рѣшаемыхъ косвенными разсужденіями отъ искомыхъ чиселъ, г. С. восклицаетъ: [Признаемся, мы никогда не слыхали, чтобы задачи раздѣлялись на выводныя и разборныя. Можно себѣ представить изумленіе ученика, когда онъ безъ труда рѣшитъ выводныя задачи автора косвеннымъ разсужденіемъ отъ искомаго, а разборныя—прямымъ разсужденіемъ отъ даннаго]. Конечно, критикъ, вторично сознавшійся, что онъ не читалъ моей ариѳметики, хотя и составилъ о ней отрицательное мнѣніе, знаетъ только употребительное до сихъ поръ раздѣленіе „ариѳметическихъ" задачъ на ариѳметическія и ....„алгебраическія". Во всякомъ случаѣ, замѣчу, что не только ученикъ, но и самъ академикъ не сумѣетъ переставить способы разсужденія въ рѣшеніи такихъ задачъ иначе, какъ мало понятной, искусственной подтасовкой, которой неестественность и крайнюю натянутость я берусь обнаружить, предлагая сдѣлать гласную пробу.

Послѣ изложенія пяти пунктовъ съ десятью примѣрами, объясняющими пользу введенія буквъ тѣмъ, что буквенное обозначеніе расширяетъ числовыя понятія, даетъ средства выражать общія свойства чиселъ и дѣйствій съ ними, облегчаетъ доказательство теоремъ и изслѣдованіе свойствъ чиселъ, обобщаетъ синтетическія задачи и упрощаетъ рѣшеніе аналитическихъ задачъ, я даю опредѣленіе алгебры въ такихъ словахъ: Алгебра имѣетъ цѣлью обобщать способы для рѣшенія ариѳметическихъ вопро-

совъ, а также и самые вопросы. Рецензентъ, выписывая это опредѣленіе, заявляетъ: [Ученикъ заучитъ это безъ труда. А что онъ пойметъ?]. Во всякомъ случаѣ, ученикъ изъ приведеннаго, единственно правильнаго, опредѣленія алгебры, пойметъ хотя тѣ наведенія, которыя указывались во всѣхъ только что указанныхъ пунктахъ. Но что онъ пойметъ, напр., изъ опредѣленія, даннаго авторомъ извѣстнаго руководства алгебры, профессоромъ Д., и гласящаго: „Алгебра учитъ разсуждать о величинахъ". Конечно, не только алгебра, но рѣшительно всѣ математическія науки,—и чистыя, и прикладныя, учатъ разсуждать о величинахъ. Можетъ быть, критикъ, превозносящій вообще иностранные учебники, порекомендуетъ мнѣ, напр., опредѣленіе профессоровъ Бореля и Мантеля, которые главной цѣлью элементарной алгебры указываютъ сокращенное, сравнительно съ ариѳметикой, изложеніе общихъ разсужденій и формулировку общихъ правилъ. Но лично я сомнѣваюсь, чтобы въ алгебрѣ короче, чѣмъ въ ариѳметикѣ добывались и примѣнялись—правила умноженія и дѣленія многочленовъ, нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго, сокращенія и приведенія къ одному знаменателю дробей многочленовъ, извлеченія изъ многочленовъ корней квадратныхъ и кубичныхъ и т. под..

Въ предыдущей главѣ я упоминалъ уже объ отношеніи рецензента къ установленному мною раздѣленію понятій—выраженіе и формула. Между прочимъ онъ говоритъ: [У ученика можетъ возникнуть вопросъ, для чего соединенію чиселъ или выраженій посредствомъ знаковъ соотношеній не присвоено просто названіе соотношенія, а дано новое иностранное названіе? А что и послѣ того равенство будетъ называться равенствомъ, а неравенство—неравенствомъ, это топтаніе на мѣстѣ ученика можетъ, конечно, только порадовать]. По ясной русской рѣчи г. С., „соотношеніе" (одно) выражается посредствомъ „знаковъ" (нѣсколькихъ) соотношенія. Значитъ, рѣчь идетъ о какомъ-либо единственномъ соотношеніи въ родѣ ....$a=b>c<d$, въ которомъ могутъ входить всѣ три знака соотношенія. Ради чистоты русскаго языка предлагается изгнать иностранное слово—формула. Нужды нѣтъ, что для этого пришлось бы переписать заново рѣшительно всѣ математическія сочиненія. Не нужно смущаться и тѣмъ, что „соотношеніемъ" будетъ называться тогда и объектъ мысли, т.-е. соотношеніе само въ себѣ, и объектъ зрѣнія, т.-е выраженіе мыслимаго соотношенія

графическими знаками. На языкѣ критика будутъ говорить: „Обозначеніе всякаго соотношенія чиселъ посредствомъ знаковъ, выражающихъ это соотношеніе, называется соотношеніемъ". Это не будетъ топтаніемъ на мѣстѣ и даже будетъ радовать учениковъ. Вѣдь, именно, въ ихъ интересахъ г. С. вообще протестуетъ противъ употребленія „лишнихъ" словъ, какъ и противъ частаго, по крайней мѣрѣ, раздѣленія, хотя бы и разнородныхъ, понятій.

По поводу пункта XIII введенія, г. С. цитируетъ мои слова, уснащая ихъ поправками: степени раздѣляются [различаются?] по величинѣ показателя [а основанія?]. Приходится указать знатоку русскаго языка, что „различаются" степени, дѣйствительно, и по величинѣ показателя, и по величинѣ основанія, но я говорю, не о „различеніи" степеней, какъ 2^3, 3^2 и т. под., а о раздѣленіи ихъ на квадраты, кубы, четвертыя, пятыя, почему и употребляю слово раздѣляются.

Ту же неумѣстную поправку моихъ словъ критикъ дѣлаетъ и по поводу раздѣленія корней по величинѣ показателя, обнаруживая своей двукратной ошибкой, что послѣдняя не случайна, а объясняется неумѣньемъ, именно, съ его, а не съ моей стороны, владѣть точной словесной рѣчью. Отмѣтимъ опять, что „различаются", какъ поправляетъ меня критикъ, корни также и по величинѣ подкоренного числа. Между тѣмъ, ничто же сумняшеся, г. С. заявляетъ: [Здѣсь, какъ впрочемъ и во многихъ другихъ учебникахъ, удивительная путаница выраженій; но если обратиться къ Эйлеру или къ современнымъ иностраннымъ учебникамъ, то можно узнать, что $\sqrt[n]{a}$ называется n—нымъ корнемъ изъ a; а если a откинемъ, то останется знакъ n—го корня; ни о какомъ „показателѣ корня, ни о „степени" корня не должно быть и рѣчи]. Въ дѣйствительности, „здѣсь" обнаруживается не путаница моего и другихъ русскихъ учебниковъ, а прежде всего новая междустрочная эволюція логики г. С.. Только что было заявлено, что степени и, значитъ, также корни различаются не только по ихъ показателю; теперь, въ указаніи на то же различеніе, подкоренное число a отбрасывается, какъ лишнее. Конечно, рекомендуемый способъ названія корней можно принять для краткости рѣчи, хотя порядковый счетъ корней теряетъ признакъ самаго опредѣленія понятія о корнѣ, т.-е. равенства $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Но интересно, какъ Эйлеръ и современные иностранные авторы стали бы строить теорію корней, если бы на нихъ распространялось предписаніе

нашего академика „не говорить о степени корня", т.-е. именно о предыдущемъ равенствѣ, выражающемъ опредѣленіе понятія.

Цѣлую страницу рецензіи г. С. посвящаетъ смакованію открытой имъ, видимо, только у меня разнорѣчивости въ опредѣленіи коэффиціента, выраженной, между прочимъ, въ томъ, что я говорю и о коэффиціентѣ выраженія, и о коэффиціентахъ уравненія, въ чемъ, однако, слѣдую общепринятому обычаю. Иронизируя надъ также употребительными, но только мнѣ приписываемыми, названіями коэффиціентовъ квадратнаго уравненія—первымъ, вторымъ и третьимъ, а также—среднимъ и крайними, критикъ предлагаетъ мнѣ назвать коэффиціентъ a „крайнимъ лѣвымъ", а c „крайнимъ правымъ". Онъ сожалѣетъ также, что я не додумался ввести еще особыя названія для коэффиціентовъ уравненій 3-й и 4-й степени. Въ торжественномъ заключеніи страницы дается мнѣ указаніе на общее, якобы, опредѣленіе коэффиціента, выписанное текстуально изъ новѣйшаго нѣмецкаго учебника и въ переводѣ такое: [Часто называютъ также одного изъ двухъ множителей, обыкновенно того, которому въ данномъ вычисленіи придаютъ меньшій интересъ, коэффиціентомъ другого, именно опредѣленное число въ произведеніи изъ одного опредѣленнаго и другого неопредѣленнаго числа]. Разумѣется, если бы я высказалъ такое опредѣленіе, то критикъ, судя по его общей манерѣ, перемѣнилъ бы свой фронтъ съ крайней правой позиціи на крайнюю лѣвую и потребовалъ бы у меня объясненія того, какъ часто примѣняется такое опредѣленіе, какъ измѣняется оно въ необыкновенныхъ случаяхъ, какъ математически оцѣнивается интересъ множителя и т. под.. Въ духѣ постоянной, и, на этотъ разъ, справедливой заботливости объ ученикахъ, тотъ же г. С., вѣроятно, опротестовалъ бы изложеніе въ самомъ началѣ алгебры такого опредѣленія, которое ученики могутъ понять и оцѣнить только въ очень дальнѣйшемъ. Наконецъ, можетъ быть, онъ додумался бы и до того, что сказанное опредѣленіе все же не исключаетъ термина коэффиціенты уравненія, какъ видно изъ формулировки многихъ теоремъ высшей алгебры, напр., такой извѣстной теоремы: всякая симетрическая функція корней алгебраическаго уравненія выражается раціонально черезъ коэффиціенты того же уравненія.

Покончивъ съ введеніемъ въ алгебру, г. С. переходитъ къ установленію понятія объ алгебраическомъ, положительномъ или отрицательномъ, количествѣ. Въ предыдущей главѣ, разбирая самъ ка-

чества моего учебника, я старался указать читателю особую отчетливость и краткость упоминаемаго ученія въ предложенной мною для него системѣ. Критикъ, наоборотъ, считаетъ мое изложеніе образцомъ сумбурнаго словопренія. Доказательства съ его стороны заслуживаютъ особой оцѣнки. Я говорю: Если при рѣшеніи числового вопроса мы обращаемъ вниманіе только на размѣръ числа, т.-е. на то, сколько въ разсматриваемомъ числѣ единицъ или долей единицы, то число называется безусловнымъ или абсолютнымъ. Г. С. возстаетъ, во-первыхъ, противъ термина размѣръ числа, заявляя вмѣстѣ съ воображаемымъ ученикомъ, что размѣръ числа всегда выражается самимъ числомъ, и, значитъ, какъ прилично только капризному ученику, игнорируя то, что тутъ же, въ этомъ пунктѣ объясненія, я указываю отрицательныя числа, размѣры или модули которыхъ отнюдь не выражаются самими этими числами. Въ только что разобранномъ замѣчаніи о коэффиціентѣ, требовалась отъ автора учебника алгебры такая общность объясняемаго понятія, которая охватывала бы и коэффиціентъ корня, и коэффиціентъ интеграла. Теперь не разрѣшается, говоря о числѣ, подразумѣвать ни алгебраическое количество съ его направляющимъ знакомъ, ни мнимый комплексъ съ его модулемъ, хотя по терминологіи г. С. всѣ эти объекты называются, именно, только числами. Понятно, такая манера критики можетъ быть примѣняема при всякихъ обстоятельствахъ, но, конечно, не заслуживаетъ почтительности.

[Предложимъ], говоритъ критикъ, [ученику рѣшить такую задачу: со вчерашняго дня температура воздуха поднялась на 5 град. и сегодня термометръ показываетъ 2 град. тепла; сколько онъ показывалъ вчера. Ученикъ составитъ уравненіе $x+5=2$ и вѣроятно догадается, что вчера было 3 град. мороза, а вскорѣ узнаетъ, что рѣшеніе уравненія будетъ —3 град.. И вотъ, обращаясь къ объясненію автора безусловныхъ чиселъ, онъ скажетъ: если мы обращаемъ вниманіе только на размѣръ числа —3, то кѣмъ-то оно называется безусловнымъ]. Здѣсь интересно то, что уже не кѣмъ-то, а академикомъ математики корень уравненія $x+5=2$ признанъ не отрицательнымъ количествомъ, а абсолютнымъ числомъ, при вычисленіи котораго мы, якобы, обращаемъ вниманіе только на модуль результата. Также 2 градуса тепла предписывается теперь считать величиной абсолютной, потому что, по внушеніи ученику, онъ во всемъ этомъ примѣрѣ вычисленія

долженъ усматривать одни модули чиселъ. Дѣйствительный сумбуръ понятій нашего академика развивается дальше еще полнѣе. Такъ, г. С. возстаетъ противъ названія величины народонаселенія города (критикъ поправляетъ—„населенія“, каковой терминъ, однако, можетъ относиться и къ животнымъ), или длины желѣзной дороги—величинами абсолютными. Для оправданія этого возраженія онъ замѣчаетъ, что „населеніе“ города можетъ возрастать и убывать, что длина желѣзной дороги можетъ измѣняться (какъ объясняется, отъ прокладыванія или снятія рельсъ даже гдѣ-нибудь между конечными пунктами). Помимо отмѣченныхъ побочныхъ несообразностей, обратимъ вниманіе на самую сущность разсужденія: Изъ того, напр., что въ суммахъ 3587 жителей $+25$ жителей или 283 версты $+7$ верстъ числа 25 и 7 прибавляются, слѣдуетъ, будто бы, что первыя слагаемыя этихъ суммъ должны считаться не абсолютными, а направленными. Значитъ, такъ какъ величиною называется все то, что можетъ увеличиваться или уменьшаться, то всѣ величины суть направленныя, абсолютныхъ же величинъ вовсе нѣтъ, какъ нѣтъ и безусловныхъ чиселъ. И, однако, тутъ же, переписавъ четыре указанныхъ мною задачи, изъ которыхъ двумя я отмѣчаю роль безусловныхъ чиселъ, а другими двумя роль относительныхъ или направленныхъ, г. С. заявляетъ: [Непонятно, почему къ двумъ задачамъ на числа безусловныя понадобилось прибавить еще двѣ новыя задачи]. Таково собственное литературное и логическое развитіе главнаго руководителя математическаго образованія у насъ. Нетрудно понять, какъ должно оно отражаться на всемъ ходѣ преподаванія. Разборъ этотъ пора бы и закончить. Но, скажутъ, пожалуй, что я обхожу замѣчанія, дѣйствительно вѣрныя, такъ поищемъ еще таковыхъ.

Мое заявленіе о томъ, что формулы съ абсолютными числами, подобныя $a+(b-c)=(a+b)-c$, съ точки зрѣнія ариѳметики требуютъ доказательства, а въ алгебрѣ, при распространеніи на количества свойствъ перемѣстительности и сочетательности суммы, становятся очевидными, рецензентъ называетъ „прелестнымъ“ разсужденіемъ. Пытаясь возразить, онъ пишетъ: [Ну, а съ логической точки зрѣнія можно писать такія вещи? Для чего же въ такомъ случаѣ учить ариѳметику?] Для чего, значитъ, по той же „прелестной“ логикѣ, учить ариѳметику, если въ ней даже простое вычитаніе $5-7$ считается невозможнымъ? Какой смыслъ изучать чистый анализъ безконечно-малыхъ, если тамъ существованіе про-

изводной и интеграла, даже для непрерывной функціи, требуетъ доказательства, а въ геометріи очевидно, что уголъ касательной къ непрерывной кривой и площадь, отграничиваемая этой кривой, существуютъ?

[На стр. 15], говоритъ критикъ, [узнаемъ, что послѣдовательность чиселъ. . . . —3,—2,—1, 0,+1,+2,+3,. . . .называется „нормальнымъ алгебраическимъ рядомъ количествъ". Замѣчательно, что вводя безъ всякой надобности множество новыхъ названій, авторъ только мимоходомъ, на стр. 141 упоминаетъ „о такъ называемомъ натуральномъ рядѣ" 1, 2, 3,. . . .]. Замѣчательно, скажу я, выдрессированы ученики, воображаемые критикомъ. Когда нужно, они, читая первую страницу алгебры, уже сравниваютъ безконечность четныхъ чиселъ съ безконечностью всѣхъ чиселъ натуральнаго ряда, и, наоборотъ, читая 15-ю страницу, забываютъ изъ ариѳметики всякое понятіе о рядѣ 1, 2, 3,. . . .

Критикъ отмѣчаетъ, что на стр. 17 стоитъ заголовокъ „Дѣйствія съ явными количествами", а самое понятіе о явномъ количествѣ дается въ слѣдующей главѣ при сравненіи съ неявными. Подобно этому, на 76-й страницѣ цѣлый отдѣлъ озаглавленъ „Алгебра раціональныхъ формулъ", хотя понятіе о раціональной формулѣ оттѣняется дальше, при встрѣчѣ съ корнями. Выходитъ, въ силу такого замѣчанія, что нельзя было бы раздѣлить всю книгу на двѣ части, поставивъ на оберткѣ первой части заголовокъ „Алгебра раціональныхъ количествъ", въ отличіе отъ второй части, которая трактовала бы объ ирраціональныхъ количествахъ. Также, въ общемъ курсѣ тригонометріи, прямолинейной и сферической, нельзя было бы распредѣлить названія частей, не объясняя сразу значенія обоихъ названій.

Объясняя раздѣленіе количествъ на явныя и неявныя, я, какъ уже упоминалъ выше, говорю: „Если количество дано вполнѣ, т.-е. числовое значеніе и знакъ его извѣстны, то оно называется явно выраженнымъ или просто явнымъ количествомъ. Напримѣръ, +5,—3 суть явныя количества. Если же количество обозначено буквой или представлено выраженіемъ, въ которомъ обозначенныя дѣйствія еще не выполнены, то оно называется неявно выраженнымъ или просто неявнымъ количествомъ. Напримѣръ, a, $-b$, $a+b$, $a-b$ суть неявныя количества". Критикъ, цитируя эти 8 строкъ, называетъ изложеніе противнымъ по его схоластикѣ и тягучему, неясному стилю. Полагаю, что читатель оцѣнитъ такое заявленіе безъ

моихъ указаній. По существу, на указанное мною раздѣленіе количествъ, г. С. возражаетъ примѣромъ $2+1$. Утѣшу его признаніемъ, что, въ этомъ примѣрѣ, я самъ готовъ видѣть и явное количество, и неявное. Странно, однако. что по поводу моего раздѣленія количествъ на положительныя и отрицательныя, мнѣ не былъ, съ подобнымъ же остроуміемъ, указанъ нуль, который въ алгебрѣ можетъ считаться и положительнымъ. и отрицательнымъ. Я признаю вполнѣ, что, въ понятіяхъ первичныхъ, исходныхъ, разнородность признаковъ не отличима. Напр., и въ цѣломъ числѣ нельзя отличить счетъ и отношеніе. Но вѣдь дѣло въ томъ, что мое раздѣленіе относится вовсе не къ такимъ понятіямъ. А что раздѣленіе не схоластично, а вызывается требованіями научной логики, приведу доказательства: Напр., профессоръ Д., говорилъ, что всякая алгебраическая сумма, скажемъ. $3-8+5-2$ содержитъ столько единицъ, сколько ихъ есть во всѣхъ слагаемыхъ. Въ неявномъ видѣ указанной суммы, она, дѣйствительно, содержитъ всего 18 единицъ, въ явномъ же равна -2. Также, если бы академикъ Е. различалъ явныя и неявныя количества, то не указывалъ бы въ общемъ опредѣленіи алгебры, что она занимается преобразованіями однихъ рядовъ дѣйствій въ другія. Наконецъ, и самъ г. С., если бы удостоилъ пониманіемъ то, о чемъ идетъ рѣчь, то не приводилъ бы вторымъ мнѣ возраженіемъ, что онъ не знаетъ, считать ли коэффиціенты уравненія, выраженныя буквами, явными количествами, или неявными. Я не уподобляю понятій „явное“ и вообще „данное“. Кстати, теперь самъ рецензентъ заговорилъ о коэффиціентахъ уравненія, чего прежде мнѣ не разрѣшалъ. Но это и понятно, потому что отрицаніе такого термина было на 9-й страницѣ рецензіи, а теперь, вѣдь, идетъ 14-я.

Теорію общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго я излагаю въ первой части учебника, вслѣдъ за общей теоріей дѣленія и, значитъ, раньше ученія объ алгебраическихъ дробяхъ. Это обезпечиваетъ возможность своевременно дѣлать всякія сокращенія дробей и приведенія ихъ къ наименьшему кратному знаменателю. При дѣленіи одночленовъ и многочленовъ, приходится, разумѣется, говорить о дѣленіи нацѣло и съ полученіемъ дробей, въ послѣднемъ случаѣ дополнительныхъ, отъ дѣленія остатка на дѣлителя. Конечно, ученики изъ самыхъ такихъ примѣровъ видятъ, что признакъ алгебраической дроби не въ числовомъ дѣлителѣ, а въ буквенномъ, и, получая, напр., при дѣленіи многочленовъ,

члены частнаго съ дробными числовыми коэффиціентами, не считаютъ эти члены алгебраическими дробями и не усматриваютъ въ такомъ обстоятельствѣ невозможности дѣленія нацѣло. Но, самое раздѣленіе выраженій на цѣлыя и дробныя, я формулирую окончательно, переходя уже къ дробямъ, и тутъ рецензентъ, упуская изъ виду, что аналогично всѣ поступаютъ при раздѣленіи, напр., количествъ на раціональныя и ирраціональныя, на дѣйствительныя и мнимыя, ловитъ меня, съ присущимъ ему искусствомъ, на кажущейся ему непослѣдовательности, и на этотъ разъ съ особымъ торжествомъ высказываетъ свои укоры. Понадобилась знаменитая фраза Д'Аламберта [идите впередъ и вѣра придетъ къ вамъ], чтобы утѣшить учениковъ въ томъ, что они оперировали съ цѣлыми выраженіями, не зная окончательнаго опредѣленія понятія о цѣломъ выраженіи. Понадобилось и особое дополненіе къ указанной фразѣ [но не возращайтесь вспять], потому что тогда ученики, воспринимая мое указаніе—при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя одночленовъ—отыскивать сначала общаго наибольшаго дѣлителя коэффиціентовъ, забудутъ, въ силу дисциплины, что послѣдній отыскивается въ ариѳметикѣ для цѣлыхъ только чиселъ, и въ примѣрѣ $\frac{1}{2}a^2$ и $\frac{1}{4}ab$ начнутъ искать его для чиселъ $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$. Однимъ словомъ, мнѣ лично оставлена лишь возможность поздравить критика съ успѣхомъ его талантливаго научнаго разбора книги.

Проявляя въ дѣлѣ такого разбора особую микроскопичность сужденій, г. С. упускаетъ, однако, случаи дѣлать мнѣ дѣйствительно серьезные укоры. Напр., по поводу доказательства теоремы объ умноженіи частей уравненія на знаменателя входящей въ немъ дроби, онъ говоритъ только: [Мы уже цитировали profession de foi автора, что то, что въ ариѳметикѣ доказывается], (напомню читателю формулу $a+(b-c)=(a+b)-c$) [въ алгебрѣ, очевидно, и онъ остается вѣренъ себѣ въ общей теоріи равенства, въ которой, напримѣръ, на стр. 86, онъ безъ колебанія заявляетъ ученикамъ III класса, что „цѣлое выраженіе обращается въ нуль, очевидно, только тогда, когда содержитъ множителя, равнаго нулю“]. Отмѣченная profession de foi моя удостовѣрена критикомъ по поводу одного примѣра съ формулой, которую я напомнилъ, а окончательно утверждается приводимымъ вторымъ примѣромъ. Въ общежитіи логика заключенія отъ единицы, или, пожалуй, отъ 2 къ n называется женской логикой. Но не въ этомъ дѣло. И не въ томъ оно, что на этотъ разъ дисциплинированные ученики добровольно

переходятъ въ третій классъ изъ IV-го, такъ какъ дѣленіе многочленовъ, прикосновенное по сущности къ разсматриваемому вопросу, проходится лишь въ четвертомъ классѣ. Для этихъ учениковъ, имѣя въ виду одни простѣйшія опредѣленныя ур-ія, указанное положеніе ясно изъ признака дѣлимости многочлена на разность $x-a$, каковой признакъ въ моемъ учебникѣ въ статьѣ о дѣленіи разбирается. Но, не замѣченная критикомъ, дѣйствительная вина моя въ томъ, что я этому положенію придаю болѣе широкое значеніе. Я очень желалъ бы, чтобы кто-либо нашелъ для него элементарное доказательство при общихъ условіяхъ.

Полагая, что обычный переходъ отъ знакомыхъ учащимся тождественныхъ формулъ къ уравненію первой степени съ „однимъ“ неизвѣстнымъ x слишкомъ мало оттѣняетъ понятіе объ условномъ равенствѣ и даже связываетъ это понятіе, взамѣнъ прежняго вопросительнаго знака, съ „алгебраической“ буквой x, я привожу рядъ примѣровъ, именно,—ур-іе $2a=10$, имѣющее одно рѣшеніе, ур-іе $(a-2)(a+3)$, имѣющее два рѣшенія, ур-іе $b=3a$ съ безчисленнымъ множествомъ паръ корней, и ур-іе $c=(b-a):2$ съ безчисленнымъ множествомъ троекъ корней. Затѣмъ, говоря о повѣркѣ уравненій, показываю, что ур-іе $c(a+2b+c)=(b+c)^2$ удовлетворяется при условіи $b^2=ac$, а ур-іе $(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d)$ также удовлетворяется при условіи $ad=bc$. Благодаря такимъ, крайне простымъ, примѣрамъ, сразу устанавливается широкое понятіе объ уравненіи, опредѣленномъ и неопредѣленномъ. Выясняется, конечно, и смыслъ указанія, что уравненіе удовлетворяется при такомъ-то условіи. Послѣ этого объясняю теорему, которую г. С. цитируетъ со всѣми объясненіями цѣликомъ, но въ краткомъ резюме подтасовываетъ мои слова, выражаясь такъ: [Резюмируемъ: при нѣкоторомъ условіи будетъ $A=B$ и тогда будетъ также $A+C=B+C$; при другомъ условіи будетъ $A+C=B+C$ и тогда будетъ также $A=B$]. У меня, однако, было сказано, не при другомъ условіи, а при условіи, которое можетъ быть инымъ, что, разумѣется, нужно отличать. Во всякомъ случаѣ, я, этимъ, вовсе и не мнѣ принадлежащимъ, а мною лишь нѣсколько обобщеннымъ разсужденіемъ, доказываю, что всѣ корни перваго ур-ія удовлетворяютъ второму, и, наоборотъ, всѣ корни второго удовлетворяютъ первому, т.-е., что разсматриваемыя ур-ія, какъ говорятъ обыкновенно, однозначущи, или, какъ я говорю, совмѣстны. Критикъ, заявивъ, что это разсужденіе „трудно понять“, сопоставляетъ, за-

тѣмъ, изложеніе теоремы съ указаніемъ слѣдствія изъ нея о перенесеніи членовъ, объясняемаго на примѣрѣ пропорціи $a-b=c-d$, и говоритъ: [Въ результатѣ ученикъ, пожалуй, подумаетъ, что можно легко обращаться съ равенствами, когда они содержатъ малыя буквы a, b, c, d; а когда въ нихъ входятъ прописныя буквы A, B, C, то нужно дѣлать какія-то непонятныя разсужденія!]. Полагаю, что истинная оцѣнка любымъ читателемъ подобной критики не можетъ быть подтасована.

Повсюду въ рецензіи видна безпочвенная и совершенно непристойная придирчивость г. С.. Не имѣя средствъ найти серьезные недостатки книги, онъ копается въ ея страницахъ, чтобы отъискать какое-либо оправданіе своего негодующаго отношенія къ ней. При этомъ математическую сторону дѣла критикъ почти не затрогиваетъ, а вертится, главнымъ образомъ, въ области словесныхъ выраженій и разныхъ, болѣе или менѣе спорныхъ, мелочныхъ сужденій. Продолжу примѣры:

[Переходя къ системѣ уравненій первой степени, авторъ сразу и кратко заявляетъ, что „при рѣшеніи опредѣленныхъ вопросовъ число независимыхъ между собою уравненій должно быть равно числу неизвѣстныхъ“. Для ученика здѣсь не будетъ понятно ни значеніе словъ „опредѣленные вопросы“, ни значеніе независимости уравненій]. Въ дѣйствительности, ученикъ уже на первыхъ страницахъ введенія въ учебникъ встрѣчался съ вопросами опредѣленными и неопредѣленными и могъ оцѣнить самостоятельную роль или независимость указанныхъ тамъ уравненій. Ничто не мѣшаетъ преподавателю, устно объясняющему урокъ, напоминать эти примѣры или приводить подобные. Но критику вообще нравится разбирать учебникъ, выдержанно догматическій, съ точки зрѣнія пропедевтики. Авторъ заботится о краткости и стройности изложенія, о томъ, чтобы, при повтореніи по учебнику устныхъ объясненій преподавателя, фиксировалась сущность дѣла, а не подходы къ понятіямъ, критикъ же тащитъ его въ сторону отъ резюме, заставляетъ размѣнивать фактическое сужденіе на педагогическіе пріемы. И вышло бы, конечно, наоборотъ, если бы самый учебникъ былъ обратнаго качества. Тогда потребовалась бы сжатость изложенія, пропускъ учебныхъ подробностей и т. под..

[Исключеніе производится четырьмя способами. Не пора ли, однако, эти четыре способа выкинуть изъ школьнаго обихода, потому что вѣдь въ дѣйствительности они представляютъ одинъ способъ

исключенія]. Какъ въ объяснительныхъ частныхъ примѣрахъ, такъ и въ общей теоріи, я оттѣняю лишь два способа—подстановленія и алгебраическаго сложенія. Объ остальныхъ даю понятіе на системѣ двухъ и трехъ уравненій, но тутъ же показываю ихъ непрактичность. Не справляясь съ послѣдними нашими программами, потому что нѣтъ ихъ подъ рукой, напомню, что еще очень недавно въ этихъ программахъ съ особой настойчивостью требовалось усвоеніе способа Безу, даже для системы *n* уравненій. Я первый въ своемъ учебникѣ возсталъ противъ этой крайней нелѣпости, не только выбросивъ общій случай *n* ур-ій, но показавъ, что и для трехъ ур-ій способъ Безу негоденъ. Г. С. говоритъ о единственномъ способѣ исключенія и, судя потому, что изъ двухъ теоремъ, обосновывающихъ способы, онъ отвергаетъ ту, на которой непосредственно основанъ способъ подстановленія, нужно понимать, что удержанію подлежитъ лишь способъ алгебраическаго сложенія. Такое сужденіе могло бы быть почерпнуто и изъ моего учебника, въ которомъ, помѣстивъ обѣ теоремы, согласно съ классическими авторами, я, однако, отмѣтилъ, что для системы уравненій первой степени можно было бы обойтись одной. При всемъ томъ, я далекъ отъ вывода, что другую теорему нужно опустить. Слѣдовало бы помнить, что способъ алгебраическаго сложенія слишкомъ частный, что уже для системы уравненій второй степени онъ выполняетъ лишь подсобную роль, тогда какъ подстановленіе всегда было и остается болѣе общимъ способомъ исключенія.

Статью мою объ изслѣдованіи уравненій первой степени, вмѣстѣ съ незамѣнимой, по крайней мѣрѣ, для двухъ уравненій задачей о курьерахъ, г. С. считаетъ, всю цѣликомъ, написанной самымъ рутиннымъ образомъ, какъ писали [въ доброе старое время]. Между тѣмъ эта статья отличается въ нѣсколькихъ существенныхъ деталяхъ отъ изложенія другихъ авторовъ, какъ старыхъ, такъ и новыхъ. Одну изъ такихъ деталей, о выводѣ безконечнаго рѣшенія и, прибавлю, также неопредѣленнаго, я уже указывалъ. Она могла показать и критику, какъ слѣдовало бы обращаться съ уравненіями, что бы не считать ихъ на одной страницѣ рецензіи квадратными, а на другой, при подобныхъ же и еще меньше подходящихъ условіяхъ, — уравненіями первой степени. На сколько мое изложеніе соотвѣтствуетъ или не соотвѣтствуетъ модѣ, можно судить по косвенному факту: преподаватель К., вообще ревнивый къ переработкамъ своего ходкаго руководства, нашелъ почему-то нужнымъ передѣлать свое прежнее объясненіе поближе къ моему.

Критикъ видитъ главный дефектъ моего изложенія въ объясненіи дѣйствій съ нулями и безконечностями. Кстати, поговорю объ этомъ подробнѣе, чѣмъ отмѣчалъ раньше. Дѣйствія эти принято теперь опредѣлять особо, апріорными условіями, потому, якобы, что непосредственное примѣненіе общихъ опредѣленій въ подобныхъ случаяхъ не имѣетъ мѣста. Я же объясняю нагроможденіе подобныхъ условій, во-первыхъ, непониманіемъ того, что постулаты во всякой наукѣ имѣютъ обыкновенно широкое значеніе, а не относятся къ частностямъ, и, во-вторыхъ, еще тѣмъ, что истинныя опредѣленія, какъ сложенія (мое), такъ и умноженія (Коши), до сихъ поръ не оцѣнены и потому не вошли въ обиходъ. Сложить два количества значитъ произвести отъ перваго изъ нихъ то дѣйствіе, посредствомъ котораго второе количество составилось отъ нуля. Въ сложеніи $0+a$, мы видимъ самый первообразъ дѣйствія и, по опредѣленію, даже не сложенія, а самаго числа, имѣемъ результатъ a, который никакими дополнительными условіями нельзя было бы измѣнить. При сложеніи $a+0$, для составленія нуля отъ нуля не требуется производить никакого дѣйствія, и потому результатъ также равенъ a. Изъ этого и изъ опредѣленія вычитанія, какъ обратнаго дѣйствія, слѣдуютъ, безъ всякихъ условій, равенства $a-0=a$ и $a-a=0$, помимо ихъ ариѳметической очевидности. Умножить одно количество на другое значитъ произвести надъ первымъ изъ нихъ тѣ дѣйствія дѣленія на части и повторенія слагаемымъ или вычитаемымъ, посредствомъ которыхъ множитель составился изъ единицы. Изъ этого опредѣленія формула $0 \, . \, a=0$, при конечномъ a, очевидна. Для вывода другой $a \, . \, 0=0$, составленіе нуля отъ единицы можно принять въ формѣ дѣйствія $1-1$ и получится, по опредѣленію умноженія, $a-a$, безъ примѣненія, конечно, здѣсь еще не раскрытаго, свойства распредѣлительности. По опредѣленію дѣленія, какъ дѣйствія обратнаго, выйдетъ дальше, при a пока конечномъ, $\frac{0}{a}=0$ и $\frac{0}{0}=a$, и съ послѣднимъ выводомъ высшая математика отнюдь не станетъ въ противорѣчіе. Опредѣливъ, затѣмъ, приближеніемъ знаменателя къ нулю, равенство $\frac{a}{0}=\infty$, получимъ, также по опредѣленію дѣленія, $a=0 . \infty$ и $\frac{a}{\infty}=0$, и нигдѣ не встрѣтимъ противорѣчій, а составимъ замкнутый, вполнѣ провѣряющійся въ деталяхъ, циклъ предѣльныхъ формулъ. Академикъ иронизируетъ, повидимому, надъ свободой

оперированія съ такими формулами, которымъ придаютъ обыкновенно мистическое значеніе, но я предложилъ бы ему гласный литературный диспутъ объ этомъ въ сферѣ высшей математики. Ничего Мефистофелевскаго въ алгебраическихъ операціяхъ съ нулями и безконечностями я не замѣчаю. Да и въ анализѣ безконечно-малыхъ роль Мефистофеля устраняется постулатомъ, на которомъ основанъ весь этотъ анализъ, что, однако, до сихъ поръ не было понято и оцѣнено. Критикъ заявляетъ: [Въ дѣйствительности $\frac{0}{0}$ ничего не представляетъ, и когда при частномъ значеніи перемѣннаго выраженіе функціи принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$, говорятъ, что разсматриваемое выраженіе функціи не доставляетъ ея значеніе; это послѣднее иногда можетъ быть опредѣлено изъ дополнительнаго предположенія о непрерывности функціи]. Въ дѣйствительности, скажу я, не „предположеніе", а прямое заданіе непрерывности функціи имѣетъ мѣсто не „иногда", а почти всегда, потому что въ анализѣ мы имѣемъ дѣло съ функціями вообще непрерывными и знаемъ, что даже ихъ частные прерывы очень мало мѣшаютъ дѣлу раскрытія неопредѣленнаго вида $\frac{0}{0}$. Кромѣ того, въ такомъ раскрытіи важна не одна непрерывность функціи, а главнымъ образомъ тотъ же упомянутый основной постулатъ.

Я уже упоминалъ въ предыдущей главѣ о разногласіи взглядовъ моихъ и критика на теорію ирраціональныхъ чиселъ. Поговорю теперь и объ этомъ подробнѣе. Извѣстно, что у педагоговъ, привыкающихъ невольно въ своей дѣятельности къ однообразію мышленія и къ отсутствію критики, часто вырабатываются пунктики ученія, особо чтимые и потому внѣдряемые, при всякомъ сопротивленіи, въ умы учениковъ. То же замѣчается и въ современной педагогической литературѣ, отличающейся часто особой односторонностью и прямолинейностью сужденій. Благодаря такимъ условіямъ, нѣкоторые изъ новѣйшихъ взглядовъ, научныхъ или педагогическихъ, обыкновенно поддержанные въ началѣ авторитетами, дѣйствительными или призрачными, распространяются быстро и устанавливаются крѣпко. Другіе, иногда несравненно болѣе глубокіе и важные, остаются очень долго не понятыми и не распространенными. Разительнымъ образчикомъ такихъ, не сходныхъ по исторической судьбѣ, теорій является съ одной стороны Дедекиндова теорія несоизмѣримыхъ чиселъ, съ другой Арган-

дова—мнимыхъ количествъ. Первая, дающая лишь одинъ изъ видовъ иллюстраціи понятія о несоизмѣримомъ числѣ, сдѣлалась излюбленнымъ пунктикомъ современной элементарно-математической литературы. Вторая, составляющая ядро всей математики, за исключеніемъ нѣсколькихъ побочныхъ отдѣловъ, ждетъ еще своего, хотя коренного, признанія.

Указавъ пока на этотъ фактъ и имѣя въ виду оцѣнить его еще въ дальнѣйшемъ, возвращусь къ текущему вопросу о несоизмѣримыхъ числахъ и именно тѣхъ, понятіе о которыхъ получается при извлеченіи корня. Такимъ числамъ я, пожалуй, и не вполнѣ соотвѣтственно, но избѣгая новаго термина, придаю спеціальное названіе ирраціональныхъ, въ отличіе отъ получаемыхъ при другихъ разнообразныхъ математическихъ операціяхъ. Въ логическомъ построеніи обѣихъ теорій, новѣйшей, якобы, болѣе научной, и, такъ называемой теперь, старой, которую я излагаю, есть лишь то, конечно, принципіальное различіе, что первая строится синтезомъ, а вторая анализомъ. Какъ я указывалъ уже раньше, синтезъ имѣетъ опору въ своихъ предпосылкахъ, анализъ же находитъ не менѣе прочную научную опору въ своемъ развитіи. Существованіе ирраціональнаго числа одинаково бездоказательно принимается въ обѣихъ теоріяхъ. Синтетическая выводитъ этотъ фактъ изъ допущенія конкретной линейной непрерывности, аналитическая изъ создаваемой умозрительно непрерывности числовой. Въ опредѣленіи неравенства синтетическая теорія различаетъ правую и лѣвую точку, аналитическая—большее или меньшее подкоренное число. Въ опредѣленіяхъ дѣйствій синтетическая теорія скрытно подразумѣваетъ предѣлъ, аналитическая говоритъ о послѣднемъ открыто. Въ педагогическомъ же отношеніи остается огромная разница. Синтетическая теорія несомнѣнно глубокомысленна, но притомъ сложна, многословна и, будучи общей по отношенію къ объектамъ изслѣдованія—несоизмѣримымъ числамъ, сохраняетъ, однако, частный, изолированный характеръ по методу, тогда какъ аналитическая проста, обща и несравненно кратка. Мѣсто Дедекиндовой теоріи во введеніи въ анализъ непрерывныхъ функцій, гдѣ оба представленія о непрерывности числовой и геометрической, конечно, полезно согласовать. Внѣдреніе же ея въ элементарный курсъ, въ особенности въ томъ освѣщеніи, которое даютъ офиціальные руководители нашего образованія, составляетъ одну изъ несообразностей, какими вообще богата наша

педагогика. Между прочимъ, самъ авторъ новѣйшей теоріи открыто говоритъ и умѣло разъясняетъ, что въ его разсужденіи отнюдь не дается доказательства существованія несоизмѣримаго числа и что существованіе такого числа признается лишь апріорно. Наши же наставники при первой встрѣчѣ учениковъ съ ирраціональными числами не только не способствуютъ такому признанію, но начинаютъ съ упорнаго его отрицанія. Такъ, авторъ К., доказавъ, что число 40 не есть квадратъ ни цѣлаго числа, ни дробнаго, говоритъ: [Значитъ, изъ такого числа нельзя извлечь квадратный корень. Но мы условимся, что, если требуется извлечь квадратный корень изъ какого-нибудь цѣлаго числа, то это надо понимать въ томъ смыслѣ, что требуется извлечь квадратный корень или изъ самаго числа, если оно окажется квадратомъ цѣлаго числа, или же изъ наибольшаго квадрата цѣлаго числа, какой заключается въ данномъ числѣ]. Дальше примѣняется подобное же условіе при установленіи понятія о дробныхъ приближеніяхъ къ корню, съ недостаткомъ и съ избыткомъ. Всякому, мыслящему логично, ясно, что допущеніе подобныхъ условій совмѣстно лишь съ признаніемъ существованія корня и подчиненія его извѣстнымъ неравенствамъ, а также съ признаніемъ этого корня предѣломъ приближеній. Слѣдовательно, извлечь корень не нельзя, а можно, въ смыслѣ представленія умомъ результата. Устанавливаемое же авторомъ соглашеніе съ учениками не только излишне, но и противорѣчитъ здравому смыслу: Если искомый корень не существуетъ и невозможенъ, то и никакихъ приближеній къ нему не можетъ быть, и невозможное дѣйствіе никакимъ соглашеніемъ нельзя замѣнить возможнымъ. Иначе, пожалуй, и при другомъ, аналогичномъ случаѣ было бы позволительно вести, напр., такую рѣчь: „Извѣстно, что $\sqrt{-5}$ не можетъ быть ни положительнымъ, ни отрицательнымъ, и потому невозможенъ и не существуетъ. Но мы условимся извлекать корень изъ абсолютнаго числового значенія подкоренного количества, беря приближенія съ недостаткомъ и съ избыткомъ и приписывая этимъ приближеніямъ какъ положительный, такъ и отрицательный знакъ“. Разница отъ вышеразсмотрѣннаго случая была бы только въ томъ, что вмѣсто паръ послѣдовательныхъ приближеній получали бы цѣлыя четверки воображаемыхъ таковыми. Вообще, какъ видимъ, нельзя устранить анализъ изъ математики никакими казенными предписаніями. Извѣстно, что, обходя аналитическое опредѣленіе $(\sqrt{-5})^2=-5$, мы, по син-

тетическому, якобы, общему закону перманентности, получили бы выводъ $\sqrt{-5}.\sqrt{-5}=\sqrt{+25}=\pm 5$, который, однако, не вѣренъ.

Для оцѣнки второй части моего учебника, г. С. отсылаетъ читателя къ рецензіи профессора К. Самъ онъ высказываетъ немного возраженій, преимущественно лишь подкрѣпляя нѣкоторыя замѣчанія второго критика. Указанная рекомендація читателю даетъ мнѣ, разумѣется, основаніе считать обоихъ критиковъ вполнѣ солидарными и, значитъ, относить и къ академику то, что я буду въ дальнѣйшемъ говорить о профессорѣ. Пока продолжу еще разборъ настоящей рецензіи.

Выясняя значеніе ирраціональнаго числа какъ предѣла его приближеній, я тутъ же даю общее опредѣленіе: Предѣломъ перемѣннаго числа называется то постоянное число, къ которому перемѣнное приближается такъ, что разность между ними можетъ сдѣлаться и остается меньше всякаго произвольно малаго числа. Г. С., во-первыхъ, укоряетъ меня въ томъ, что я не объяснилъ понятія о перемѣнномъ числѣ. Это напоминаетъ одно прежнее замѣчаніе: Когда я упоминалъ о размѣрѣ или модулѣ числа, критикъ не хотѣлъ видѣть отрицательныхъ чиселъ, о которыхъ шла рѣчь, и настаивалъ на томъ, что модуль числа есть само число. Теперь, когда я на двухъ страницахъ говорю о перемѣнныхъ приближеніяхъ къ ирраціональному корню, оказывается, въ силу каприза, что никакихъ перемѣнныхъ нѣтъ и даже понятіе о нихъ не затрагивается. О самомъ опредѣленіи предѣла, г. С., поддерживая профессора К., говоритъ: [это предполагаетъ, что постоянное число извѣстно, ибо какъ же въ противномъ случаѣ можно судить, что къ нему приближается перемѣнное; а вѣдь ирраціональный корень и представляетъ именно неизвѣстное число, которое опредѣляется какъ предѣлъ ряда извѣстныхъ чиселъ]. Не берусь рѣшить, наивность ли обоихъ критиковъ видна въ этомъ замѣчаніи, или втираніе очковъ читателю, но фактъ въ томъ, что надобность сравненія— самаго предѣла и приближеній къ нему съ одной стороны—устраняется хорошо извѣстной и притомъ очевидной теоремой: Если постоянная величина всегда заключается между двумя перемѣнными, которыхъ разность безконечно мала, то постоянная есть общій предѣлъ обѣихъ перемѣнныхъ. Напр., $\sqrt{3}$ содержится между приближеніями каждой изъ паръ чиселъ 1 и 2, 1,7 и 1,8, 1,73 и 1,74, 1,732 и 1,733, ... Поэтому,

отнюдь не сравнивая точно корень съ приближеніями только меньшими, или только большими, а лишь констатируя его содержаніе между ними и безграничное сближеніе приближеній обоего рода, мы говоримъ, что $\sqrt{3}$ есть предѣлъ перемѣнныхъ чиселъ, какъ ряда 1, 1,7, 1,73, 1,732, ... , такъ и ряда 2, 1,8, 1,74, 1,733,. . . .

Напомню читателю, что, при изслѣдованіи квадратнаго уравненія, академикъ запрещаетъ, въ случаѣ обращенія коэффиціента a въ нуль, разсматривать безконечный корень, хотя, напр., въ аналитической геометріи, которую въ другомъ мѣстѣ онъ же мнѣ напомнилъ, отъ этого разрушилась бы вся метода изслѣдованія безконечныхъ вѣтвей кривыхъ второго порядка. Добавлю теперь, что, угрожая мнѣ возмездіемъ за непослушаніе, г. С. говоритъ: [А если авторъ его] (т.-е. безконечный корень) [разсматриваетъ, то цитированная нами теорема] (о совмѣстности уравненій $A=B$ и $A+C=B+C$) [окажется невѣрною. Полагая, напр., $A=x-1$, $B=1-x$, $C=x^2$, увидимъ, что $A=B$ при $x=1$ и при этомъ будетъ также $A+C=B+C$; но послѣднее уравненіе будетъ имѣть безконечный корень, который не удовлетворяетъ уравненію $A=B$]. Приходится замѣтить критику, что до сихъ поръ опорную для цитированной теоремы аксіому о прибавленіи къ равнымъ числамъ поровну примѣняли лишь къ конечнымъ прибавкамъ. Если же академическимъ авторитетомъ распространить эту аксіому на прибавки безконечностей, то получится даже болѣе разностороннее средство для возмездій за ослушаніе. Напр., читатель, не смѣйте думать, что числа 5 и 2 не равны. А если вы такъ думаете, то не угодно ли прибавить къ этимъ числамъ по ∞ и попробуйте не согласиться съ равенствомъ $\infty+5=\infty+2$, которое всѣми математиками признается.

Разсматривая въ теоріи прогрессій вопросъ объ опредѣленіи знаменателя прогрессіи q изъ уравненія $s=\frac{aq^n-a}{q-1}$, я поясняю, что нужно предварительно сократить дробь второй части равенства на $q-1$: „Нельзя“ говорю я, „умножить обѣ части на $q-1$, потому что дробь сократима, а при такомъ условіи умноженіе внесло бы не соотвѣтствующее рѣшеніе $q=1$“. По мнѣнію критика, наоборотъ: [Можно, пожалуй, даже должно умножить, но затѣмъ не обращать вниманія на корень $q=1$, замѣтивъ, что при $s<an$ будетъ $q<1$, а при $s>an$ будетъ $q>1$, ограничиваясь предположеніемъ $q>0$]. Итакъ, по академическому предписанію, требуется:

игнорировать теорему, очень важную для устраненія частыхъ ошибокъ, ограничиться предположеніемъ о неизвѣстномъ, хотя бы и неумѣстнымъ, потому что вопросъ можетъ относиться и къ отрицательному q, преобразовать уравненіе къ виду $sq-s=aq^n-a$, раскрывъ, конечно, скобки, затѣмъ, не топчась на мѣстѣ, снова закрыть скобки для выдѣленія корня, выдѣлить этотъ корень, не обращая на него вниманія, и послѣ этого, разумѣется, успокоиться, потому, что, въ элементарной алгебрѣ дальше, вѣдь, не куда идти, при $n>2$. Все это предписывается авторамъ руководствъ для того, чтобы они научились у академика смѣшивать понятія о лишнемъ корнѣ уравненія, внесенномъ ошибочнымъ рѣшеніемъ, и о лишнемъ же корнѣ, не соотвѣтствующемъ условіямъ вопроса.

Слѣдующіе указаніе критика, что я не доказываю строго стремленія при абсолютномъ q, меньшемъ единицы, выраженія q^n къ нулю, при n безгранично возрастающемъ, правильно. Я благодаренъ за указаніе требуемаго доказательства. Но и въ этомъ случаѣ меня смущаетъ манера объясненій. Г. С. начинаетъ приводимое доказательство такой рѣчью: [если $\alpha>0$, то $(1+\alpha)^2>1+2\alpha$; принимая, что уже доказано неравенство $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$, находятъ, что $(1+\alpha)^{n+1}>1+(n+1)\alpha+\alpha^2>1+(n+1)\alpha$, чѣмъ и доказывается, что $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$]. Изъ первой части фразы ученикъ пойметъ, что неравенство $(1+\alpha)^2>1+2\alpha$ справедливо въ алгебрѣ лишь подъ условіемъ $\alpha>0$, тогда какъ, вслѣдствіе положительности α^2, оно справедливо всегда, и въ данномъ случаѣ нужно было оговорить, что неравенство берется въ ариѳметическомъ смыслѣ. Во второй части, ученикъ изъ сопоставленія словъ, „принимая, что уже доказано неравенство $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$“,...., „выходитъ $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$“, можетъ усмотрѣть ложный кругъ мысли, не замѣтивъ въ доказательствѣ скомканнаго до неузнаваемости метода индукціи.

Приступая къ теоріи логариѳмовъ, я разсматриваю выраженіе a^x при постоянномъ a и перемѣнномъ x, даю опредѣленіе этому выраженію для x несоизмѣримаго и распространяю на несоизмѣримые показатели извѣстные законы дѣйствій, выполняя все это очень просто и кратко. Затѣмъ, составивъ формулу $X=a^x$, указываю, что можно при разсматриваніи ея ставить себѣ вопросъ—или о вычисленіи X при различныхъ значеніяхъ x, или о вычисленіи x при различныхъ значеніяхъ X, считая притомъ a неизмѣнно постояннымъ. Это приводитъ къ установленію понятій о функціяхъ—показательной и логариѳмической. Вычисленіе первой есть новое

дѣйствіе—потенцированіе, вычисленіе второй есть обратное дѣйствіе—логариѳмированіе. Г. С. удивляется тому, что, поставивъ два вышеуказанныхъ вопроса о вычисленіи показательной функціи и логариѳма, я не далъ на нихъ немедленнаго отвѣта, а перешелъ [къ своему коньку—установленію названій]. Нужно было, значитъ, вслѣдъ за опредѣленіями, не называя даже ни показательной функціи, ни логариѳма, выставить, какъ Deus ex machina, ряды для вычисленія обѣихъ функцій. Гг. авторы руководствъ, замѣтьте это, и въ будущемъ, излагая тригонометрію, не спѣшите называть тригонометрическія количества, а укажите сначала для нихъ способы вычисленія. Впрочемъ, можетъ быть, лично для Васъ, или случайно, по вдохновенію, страница рецензіи перевернется, и Вы прочтете иное предписаніе начальства. Что касается до своего „конька"—терминологіи, не скрою, я пересолилъ: выраженіе a^x, называемое показательнымъ выраженіемъ, я назвалъ короче, переводя съ нѣмецкаго, потенцомъ, соотвѣтствующее дѣйствіе—потенцированіемъ. Г. С. напоминаетъ, что нѣмецкое слово Potenz—женскаго рода. Нельзя, значитъ, женское иностранное названіе, напр., „la ville de Paris", переводить на русскій языкъ мужскимъ названіемъ „городъ Парижъ". Во всякомъ случаѣ, терминъ потенцъ я только разъ упомянулъ и на немъ нисколько не настаиваю. Иначе смотрю я на терминъ потенцированіе, который оба моихъ критика считаютъ излишнимъ. Меня удивляетъ то, какъ могли до сихъ поръ говорить о совершенно особомъ, обратномъ логариѳмированіи, дѣйствіи, производимомъ очень часто въ элементарной и высшей математикѣ и не имѣвшемъ своего отличительнаго названія. Дѣйствіе это имѣетъ свои особые законы производства—и по существу, и формальнаго. Послѣднее иногда называется обратнымъ логариѳмированіемъ. Но и въ этомъ случаѣ оно самостоятельно, а тѣмъ болѣе при производствѣ его по существу. Высшая математика вполнѣ отличаетъ показательное выраженіе отъ степени. Какъ по способу преобразованій, такъ и по формѣ производной, разсматриваемое выраженіе и соотвѣтствующее ему дѣйствіе должны имѣть особыя названія.

Разыскивая въ теоріи логариѳмовъ еще какіе-нибудь недостатки учебника, г. С. наталкивается на сказанную тамъ фразу: „логариѳмы по преимуществу оказываются несоизмѣримыми числами". Фразу эту онъ разсчитываетъ уничтожить однимъ броскомъ мысли: [какъ будто не всякому раціональному значенію x соотвѣтствуетъ

опредѣленное значеніе X]. Однако, дѣло это не такъ просто. Легче доказать, что поспѣшность сужденій критика не позволяетъ ему даже правильно вести простой ариѳметическій счетъ: Въ равенствѣ $X=a^x$ логариѳмъ x имѣетъ столько соизмѣримыхъ значеній, сколько ихъ представляетъ выраженіе $\frac{m}{n}$ при m и n произвольныхъ цѣлыхъ; столько же будетъ и чиселъ вида $a^{\frac{m}{n}}$. Но—упомяну свой терминъ ради точности языка,—потенцу X въ указанномъ равенствѣ мы можемъ придать, напр., форму $a^{\frac{m}{n}}+b$ или $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ и при всякомъ отдѣльномъ значеніи $\frac{m}{n}$ выбрать b безчисленнымъ множествомъ способовъ такъ, чтобы разсматриваемый потенцъ не обращался ни въ одну изъ формъ $a^{\frac{p}{q}}$ при p и q цѣлыхъ; тогда окажется, что, при всякомъ основаніи a, число несоизмѣримыхъ значеній логариѳма безконечно больше числа его соизмѣримыхъ значеній. Далѣе, г. С. заявляетъ: [Не давъ опредѣленія ирраціональнаго числа, авторъ не долженъ былъ бы говорить о непрерывномъ измѣненіи и во всякомъ случаѣ долженъ доказать, а не просто заявить, что „a^d безконечно близко къ 1“, при безконечно-маломъ d]. Я полагаю, что понятія,—какъ о несоизмѣримомъ числѣ, такъ и о непрерывности,—апріорны и при малѣйшемъ точномъ намекѣ на нихъ вполнѣ отмѣчаются сознаніемъ. Притомъ, не понятіе о несоизмѣримомъ числѣ объясняетъ непрерывность, а, какъ разъ, наоборотъ. Доказательство того, что a^d стремится къ единицѣ при стремленіи d къ нулю, у меня помѣщено въ концѣ книги. Да, этому доказательству въ элементарномъ курсѣ я и не придаю значенія, считая разсматриваемое положеніе очевидно вытекающимъ изъ опредѣленія предѣла. По Ньютону предѣлъ есть послѣднее значеніе перемѣнной величины. Хотя это опредѣленіе не всегда удобопримѣнимо и французскими академиками было исправлено съ ошибкой въ другую сторону, но для элементарнаго курса его можно считать достаточнымъ.

Въ теоріи рядовъ оба критика согласно нападаютъ на два пункта моего изложенія. Во-первыхъ, ихъ возмущаетъ основное опредѣленіе: Рядомъ называется послѣдовательность алгебраически сложенныхъ выраженій, въ которой каждое слѣдующее выраженіе составляется изъ предшествую-

щаго по одному и тому же для каждаго ряда закону. Профессоръ К. находитъ, что никто не станетъ составлять члены ряда одинъ за другимъ, а не по „формулѣ“ общаго члена. Выходитъ, значитъ, что нужно давать не законъ послѣдовательнаго составленія членовъ, а формулу общаго члена. Въ примѣненіи къ разностной прогрессіи, выйдетъ, по мнѣнію г. К., непонятнымъ, если скажемъ, что каждый членъ составляется изъ предыдущаго черезъ прибавленіе одного и того же количества, а будетъ понятнѣе, если скажемъ, что такая прогрессія есть послѣдовательность количествъ a, b, ... , въ которой n-ое количество равно $a+(b-a)(n-1)$. Также кратную прогрессію нужно опредѣлять не закономъ умноженія каждаго члена на постоянное количество, а „формулой“ $a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$. Кстати сказать, въ курсѣ анализа Шлёмильха, помнится, только въ единственномъ, есть крайне сложная статья о составленіи n-ыхъ производныхъ отъ нѣсколькихъ, не самыхъ простыхъ, функцій. Раньше эту статью можно было считать совершенно безцѣльной. Теперь она окажется основной въ теоріи даже не особенно сложныхъ рядовъ.—Г. С., поддерживая съ своей стороны ту же критику моего или, вѣрнѣе сказать, общепринятаго опредѣленія ряда, называетъ это опредѣленіе неуклюжимъ, потому что, если $n+1$-й членъ есть опредѣленная функція n-го члена, то, выражая опредѣленіе ряда формулой, получимъ рядъ написаннымъ въ сложномъ видѣ $a+f(a)+f(f(a))+\cdots$ Здѣсь введена критикомъ легкая подтасовка понятій. Я, дѣйствительно, составляю $n+1$-й членъ изъ n-го и, если даже согласимся выражать опредѣленіе ряда формулой, чего до сихъ поръ никто не находилъ нужнымъ дѣлать, то формула будетъ имѣть видъ $u_{n+1}=f(u_n)$ со знакомъ f простой функціи. Критикъ же составляетъ $n+1$-й членъ отъ перваго члена, для чего требуется вводить сложную функцію, состоящую изъ n-кратнаго повторенія указанной простой. Неуклюжимъ, значитъ, оказывается не опредѣленіе ряда, рекомендующее дѣлать шаги одинъ за другимъ, а нарочито изобрѣтенное г. С. измѣненіе этого опредѣленія, требующее каждый разъ начинать хожденіе, какъ говорится, отъ печки. При столь остроумной перетасовкѣ понятій и примѣненіи математическаго символизма, даже въ простѣйшемъ натуральномъ рядѣ чиселъ, гдѣ символъ f, по моему опредѣленію, обозначалъ бы только прибавленіе единицы, опредѣленіе критика дало бы для

числа $n+1$ выраженіе въ видѣ $f(f...(f(1))...)$, т.-е. въ видѣ сложной n-кратной функціи отъ 1.

Далѣе, по поводу теоріи рядовъ, оба критика находятъ существенную погрѣшность мою въ томъ, что, при доказательствѣ основного признака сходимости, я разсматриваю только случаи, когда отношеніе $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ или постоянно возрастаетъ, начиная съ извѣстнаго мѣста въ рядѣ, или постоянно убываетъ, опуская случаи, когда оно то возрастаетъ, то убываетъ. Г. С., между прочимъ, изощрился придумать и примѣръ, наглядно показывающій возможность такого измѣненія отношенія. Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что ни одинъ изъ рядовъ, относящихся къ обычнымъ функціямъ, такой особенностью не отличается. Эта особенность настолько исключительна, что ее не предусматриваютъ даже въ многотомныхъ курсахъ высшаго анализа. По мнѣнію критиковъ, въ моемъ элементарномъ учебникѣ разборъ упомянутой подробности не имѣющей отношенія ни къ алгебрѣ, ни къ основному курсу анализа, все-таки требуется. Другое дѣло—курсъ самого профессора К., въ которомъ, хотя и относящемся къ высшей математикѣ, оказалось позволительнымъ не затрогивать, какъ этой подробности, такъ и тѣхъ даже, которыя у меня въ учебникѣ отмѣчены.

Нѣсколько послѣднихъ замѣчаній г. С., какъ однородныхъ по методу, я сгруппирую вмѣстѣ. Онѣ къ тому же не требуютъ долгихъ разъясненій. Во-первыхъ, найдя на стр. 167-й учебника неравенство $a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{a-1}{n}$, критикъ указываетъ, что оно [могло бы послужить для доказательства, что предѣлъ a^d-1 равенъ нулю, когда d приближается къ нулю]. Изъ этого указанія читатель узнаетъ отчетливо, что такого доказательства въ моей книгѣ нѣтъ. Между тѣмъ оно, именно, на этой страницѣ и приводится. Впрочемъ, виноватъ, я доказываю не то, что $\lim\limits_{d=0}(a^d-1)=0$, а что $\lim\limits_{\alpha=0} a^\alpha=1$. Во-вторыхъ, разбирая приведенное на стр. 175 разложеніе логариѳма посредствомъ обращенія формулы $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=X$, гдѣ число X, равное Неперовой показательной функціи e^x, я дальше обозначаю черезъ $1+z$, г. С. раскрываетъ читателю важныя упущенія съ моей стороны въ томъ, что я не оговариваю необходимыхъ для разсужденія неравенствъ $X>0$ и $z>-1$. На самомъ

дѣлѣ, какъ первая, такъ и вторая оговорка сдѣланы совершенно отчетливо, помимо того, что неравенства эти очевидны изъ самаго сопоставленія $X=e^x$, гдѣ e есть положительное и большее единицы основаніе натуральныхъ логариѳмовъ. Въ-третьихъ, признавъ мой выводъ логариѳмическаго ряда, сдѣланный по крайне оригинальной методѣ Арганда, очень легкимъ, критикъ говоритъ, что этотъ выводъ основанъ на завѣдомо невѣрной формулѣ $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=X$, и потому не гарантируетъ вѣрность результата. Но я основываю выводъ не на этой, дѣйствительно невѣрной, формулѣ, а на выписанной выше предѣльной, и могу принять лишь то замѣчаніе, что самая операція Арганда, совершаемая моментально и въ предѣлѣ, слишкомъ своеобразна, чтобы не поразить вниманіе читателя. Въ четвертыхъ, наконецъ, нашъ академикъ заявляетъ авторитетно: [Логариѳмическихъ рядовъ съ „особо быстрой сходимостью" и даже просто хорошо сходящихся не существуетъ]. Возможно, что всякій, знакомый съ существованіемъ ряда $L(z+1)-Lz=2\left(\frac{1}{2z+1}+\right.$ $\left.+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\cdots\cdots\right)$ не повѣритъ такому заявленію.

Изъ рецензіи профессора К. я уже разсмотрѣлъ тѣ пункты, которые поддерживаются особо и академикомъ. Имѣя въ виду оцѣнить дальше алгебраическіе и вообще математическіе взгляды профессора, скажу пока объ этомъ критикѣ лишь нѣсколько словъ. Рецензія г. К. написана еще съ бо́льшимъ, чѣмъ у академика, апломбомъ и авторитетностью тона. Но въ его замѣчаніяхъ характерна особая краткость словъ, что и подобаетъ математику, не словеснику. До подтвержденія своихъ замѣчаній какимъ-либо разъясненіемъ онъ часто и не снисходитъ. Обыкновенно, лишь цитируется какая-либо фраза изъ моей книги и въ нѣсколькихъ словахъ выражается удивленіе передъ раскрытой нелѣпостью моего изложенія. Еще чаще критикъ и совсѣмъ не тратитъ словъ, а только, приводя цитату изъ книги, ставитъ въ ней рядъ вопросительныхъ и восклицательныхъ знаковъ. Просьбы о разъясненіи замѣчаній остаются безъ отвѣта. Я этого уже добивался, какъ во вторичныхъ офиціальныхъ прошеніяхъ своихъ въ Комитетъ, такъ и въ опубликованныхъ мною разборахъ рецензій, санкціонированныхъ Комитетомъ. Напр., я говорю, что двучленныя уравненія суть простѣйшія изъ алгебраическихъ уравненій высшихъ степеней. Критикъ выражаетъ одно только высокомѣрное удивленіе.

Я послѣ этого заявляю въ прошеніи, что никто не можетъ указать уравненій болѣе простыхъ, всегда доступныхъ для рѣшенія. Въ отвѣтъ на это—молчаніе, и даже многорѣчивый г. С. въ своей дополнительной рецензіи обходитъ вопросъ. Я даю нѣкоторое опредѣленіе непрерывнаго измѣненія. Профессоръ съ высоты своего авторитета изрекаетъ безъ всякаго поясненія приговоръ: опредѣленіе невѣрно. Я предлагаю указать иное опредѣленіе и, думая вызвать критика на разъясненіе, заявляю впередъ, что его ожидаемое опредѣленіе берусь опровергнуть. Опять молчаніе, и лишь дополнительный рецензентъ глухо заявляетъ, что о непрерывномъ измѣненіи я не долженъ былъ бы говорить.

Теорія комплексныхъ количествъ.

Общепринятая до сихъ поръ алгебраическая теорія мнимыхъ и комплексныхъ количествъ служитъ лучшимъ показателемъ несовершенства распространенныхъ алгебраическихъ взглядовъ. Нигдѣ, въ другихъ частяхъ ученія, безпочвенный символизмъ съ его невѣрно истолковываемымъ закономъ перманентности не стоитъ въ такомъ широкомъ противорѣчіи съ нормальной логикой. Основное понятіе преподается изучающимъ алгебру въ такомъ видѣ: [Корень четной степени изъ отрицательнаго числа представляетъ невозможное выраженіе, потому что всякое число, положительное и отрицательное, будучи возвышено въ четную степень, даетъ положительное, а не отрицательное, число. Напр., $\sqrt{-9}$ не можетъ равняться ни $+3$, ни -3 и никакому иному числу]. Состоявшееся признаніе разсматриваемаго объекта невозможнымъ не останавливаетъ, однако, желанія утилизировать этотъ объектъ ради нѣкоторыхъ цѣлей, что оправдывается слѣдующимъ образомъ: [Введеніе въ алгебру мнимыхъ количествъ вызвано соображеніями, подобными тѣмъ, по которымъ въ нее допущены отрицательныя числа: и тѣ, и другія имѣютъ цѣлью обобщить нѣкоторыя алгебраическія предложенія или формулы. Напр., допустивъ мнимыя количества, мы можемъ утверждать, что квадратное уравненіе имѣетъ всегда два корня; также, что трехченъ 2-й степени разлагается всегда на два множителя 1-й степени]. Казалось бы, не

отрицательныя числа допущены въ алгебру, а сама алгебра получила смыслъ особой математической науки, только благодаря установленію понятія объ отрицательныхъ числахъ. Также и введеніе мнимыхъ количествъ обобщаетъ не счетъ корней квадратнаго уравненія, а все существо алгебры, дѣлая ее ученіемъ о пространствѣ двухъ измѣреній, а не, какъ прежде, только о линейномъ, т.-е. одного измѣренія.

Заявленное желаніе объ утилизаціи мнимыхъ, конечно, очень просто удовлетворяется. Дѣло сводится къ полюбовнымъ соглашеніямъ: [1) Согласились разсматривать $\sqrt{-a}$, гдѣ $-a$ отрицательное число, какъ такое количество, квадратъ котораго равенъ $-a$. 2) Согласились производить надъ мнимыми количествами дѣйствія по тѣмъ же правиламъ, по какимъ они производятся надъ количествами вещественными]. Первое условіе, казалось бы, нетрудно принять, потому что въ переводѣ на болѣе привычный языкъ оно значитъ, что квадратный корень условились считать.... квадратнымъ корнемъ. Но дѣлу мѣшаетъ основная точка зрѣнія руководителя. Вѣдь, $\sqrt{-a}$ есть невозможное выраженіе. Умножить его само на себя значитъ произвести надъ нимъ то дѣйствіе, посредствомъ котораго оно само составилось изъ единицы, т.-е. дѣйствіе также невозможное. Признать же нужно, что получится отрицательный результатъ, но не въ смыслѣ логическаго отрицанія обнаруживающейся нелѣпости, а въ смыслѣ числа, которое, правда, также было когда-то невозможнымъ, но съ которымъ уже ассимилировались по прежде бывшимъ полюбовнымъ соглашеніямъ. Какъ бы то ни было, новыхъ соглашеній всего два, и ихъ нетрудно вызубрить. Но бѣда еще въ томъ, что они противорѣчатъ одно другому, потому что, по первому условію, имѣемъ $(\sqrt{-a})^2 = -a$, а по второму, распространяя въ числѣ другихъ правилъ также правило перемноженія корней, находимъ $\sqrt{-a}.\sqrt{-a} = \sqrt{+a^2} = \pm a$. Тотъ же хаосъ понятій проявляется и въ представленіи комплекса. Несуществующее мнимое количество складываютъ съ существующимъ „вещественнымъ" числомъ. Сумму опять-таки считаютъ мнимой, невозможной. Тѣмъ не менѣе производятъ надъ комплексами всѣ алгебраическія дѣйствія, констатируя при этомъ, что, за нѣкоторыми исключеніями, результаты дѣйствій имѣютъ тотъ же видъ, какъ и данныя ихъ, т.-е. значитъ, также невозможны, не существуютъ.

Тригонометрическая теорія комплексовъ, признаваемая за строго научную, такъ же, по меньшей мѣрѣ, наивна, если не сказать больше. Въ самомъ дѣлѣ, строгая математическая теорія какого либо вопроса должна вытекать изъ отчетливыхъ и полныхъ опредѣленій тѣхъ основныхъ понятій, которыя соотвѣтствуютъ содержанію вопроса, и изъ минимальнаго числа истинъ, положенныхъ въ основаніе выводовъ. Затѣмъ, научная теорія должна представлять логическую цѣпь положеній, точно формулированныхъ и аргументально доказанныхъ. Ничего подобнаго мы въ разсматриваемой теоріи не находимъ. Основной объектъ, самый комплексъ признается здѣсь также не реальнымъ. Дѣйствія съ нимъ, однако, производятся и также бездоказательно, по условно предписаннымъ рецептамъ. Не дается вовсе необходимое для характеристики ученія указаніе на то, что разсматриваемое исчисленіе относится къ пространству не одного, а двухъ измѣреній. Между тѣмъ основное преобразованіе частей комплекса $a+bi$ по формуламъ $a=r\mathrm{Cs}\varphi$ и $b=r\mathrm{Sn}\varphi$ заимствовано, именно, изъ области геометрическихъ, плоскостныхъ представленій. Это преобразованіе разсматриваютъ, какъ чисто числовое, что, однако, представляетъ лишь непозволительное сокрытіе истины. Не будь истина скрыта, то и равенство $i^2=-1$ не оказывалось бы парадоксальнымъ условіемъ, противорѣчащимъ прежнимъ правиламъ знаковъ, а явилось бы лишь дополненіемъ этихъ правилъ.

Ни одно алгебраическое дѣйствіе въ этой теоріи не имѣетъ истиннаго опредѣленія, такъ такъ правила дѣйствій переносятся въ новую область безъ всякаго анализа новыхъ обстоятельствъ. Поэтому и приходится оговаривать исключеніе въ случаѣ перемноженія корней. Попытки доказывать правила дѣйствій представляютъ, въ сущности, ложный кругъ мысли. Такъ, начиная доказывать правило умноженія комплексовъ $r(\mathrm{Cs}\varphi+i\mathrm{Sn}\varphi)$ и $r_1(\mathrm{Cs}\varphi_1+i\mathrm{Sn}\varphi_1)$, предполагаютъ напередъ и наобумъ, что дѣйствіе это соотвѣтствуетъ обыкновенному умноженію, подчиняется его свойствамъ и, такимъ образомъ, идя въ разсмотрѣніи дѣйствія, только еще подвергаемаго обсужденію, вопреки логикѣ, отъ конца къ началу, примѣняютъ свойства перемѣстительности и распредѣлительности и уже потомъ выводятъ основной въ этой теоріи результатъ $rr_1[\mathrm{Cs}(\varphi+\varphi_1)+i\mathrm{Sn}(\varphi+\varphi_1)]$, т.-е. первичное правило умноженія. Понятно, что упомянутое разсужденіе не можетъ считаться доказательствомъ этого основного правила, а есть лишь

согласованіе преобразованій на почвѣ принятыхъ безсвязно и бездоказательно условій. Вообще, теорія эта представляетъ смѣсь бездоказательныхъ въ однихъ случаяхъ положеній и лишь призрачныхъ доказательствъ въ другихъ случаяхъ.

Совершенно иными качествами обладаетъ геометрическая теорія комплексныхъ количествъ. Я укажу здѣсь нѣсколько основныхъ ся положеній въ томъ краткомъ объемѣ, который окажется для всего дальнѣйшаго достаточнымъ. Извѣстно, что количества положительныя и отрицательныя представляются геометрически отрѣзками прямой, которую мы примемъ горизонтальной, при чемъ эти отрѣзки откладываются въ первомъ случаѣ направо отъ произвольной точки прямой, каковая точка соотвѣтствуетъ нулю, а во второмъ случаѣ налѣво. Равенство отрѣзковъ не считается нарушеннымъ при передвиженіи отрѣзковъ по данной горизонтальной прямой, безъ измѣненія ихъ размѣра и направленія. Обобщимъ понятія и условія, соотвѣтствующія прямой, т.-е. пространству одного измѣренія, на плоскость, т.-е. на пространство двухъ измѣреній. Для этого будемъ разсматривать отрѣзки прямой или, такъ называемые, векторы произвольнаго направленія, т.-е. съ произвольнымъ угломъ наклоненія къ горизонтальной прямой. Равенство этихъ отрѣзковъ опредѣлимъ такъ, чтобы оно не нарушалось отъ перенесенія векторовъ въ другое мѣсто плоскости безъ измѣненія ихъ размѣра и направленія. Примемъ, что векторъ съ размѣромъ a, отклоненный отъ горизонтальной оси на уголъ α, реализуетъ геометрически абстрактное понятіе о новомъ количествѣ, которое назовемъ комплексомъ и обозначимъ черезъ a_α. Число a назовемъ модулемъ вектора и также комплекса, угловую величину α амплитудой вектора и комплекса. Очевидно, всякій векторъ будетъ конкретно представлять нѣкоторый соотвѣтствующій комплексъ, и, наоборотъ, каждому комплексу будетъ соотвѣтствовать векторъ особаго размѣра и направленія. Въ частности обратимъ вниманіе на векторъ размѣромъ въ единицу, отклоненный отъ горизонтальной оси на прямой уголъ. Комплексъ, соотвѣтствующій такому вектору, будемъ обозначать особо, римской цифрой I или буквой i.

Сложеніе положительныхъ или отрицательныхъ отрѣзковъ прямой состоитъ, какъ извѣстно, въ томъ, что отрѣзки эти откладываются, второй за первымъ, послѣдовательно, такъ что конецъ перваго совпадаетъ съ началомъ второго, и за сумму принимаютъ

новый отрѣзокъ, идущій отъ начала перваго слагаемаго къ концу второго. Обобщая такое представленіе сложенія съ линіи на плоскость и разсматривая каждый векторъ, какъ путь поступательнаго перемѣщенія текущей точки, переходящей отъ начала вектора къ его концу, скажемъ вообще, что сложить два вектора значитъ произвести отъ конца перваго изъ нихъ то дѣйствіе— поступательное перемѣщеніе, посредствомъ котораго второй векторъ составляется отъ нуля. Тогда правило сложенія двухъ или большаго числа векторовъ будетъ соотвѣтствовать проведенію прямой отъ начала перваго слагаемаго къ концу послѣдняго или построенію замыкающей стороны для ломаной, которой послѣдовательными сторонами будутъ данныя въ извѣстномъ порядкѣ слагаемыя.—Очевидна перемѣстительность такого сложенія, опредѣляемая формулой $a_\alpha+b_\beta=b_\beta+a_\alpha$, потому что обѣ части этого равенства, представляя двѣ соотвѣтственныя суммы смежныхъ сторонъ параллелограмма, имѣютъ общую замыкающую діагональ.—Очевидно также свойство сочетательности, опредѣляемое равенствомъ $(a_\alpha+b_\beta)+c_\gamma=a_\alpha+(b_\beta+c_\gamma)$, которое легко построить и оправдать этимъ самымъ построеніемъ.—Понятно вообще, что такое сложеніе, въ примѣненіи его къ комплексамъ, будетъ заключаться въ отдѣльныхъ сложеніяхъ дѣйствительныхъ и мнимыхъ частей и явится ничѣмъ инымъ, какъ обобщеніемъ прежняго. Вся же теорія дѣйствія окажется обоснованной не бездоказательными рецептами, а строго логическимъ развитіемъ основного опредѣленія.

Умноженіе на абсолютное число понимается геометрически, какъ удлиненіе или укороченіе множимаго отрѣзка, или какъ поступательное перемѣщеніе конца отрѣзка въ сторону удаленія отъ начала или приближенія къ нему. Изъ геометрическаго представленія количествъ i и -1 ясно, что умноженіе на эти количества, хотя дѣйствительныхъ количествъ, должно быть понимаемо, какъ вращеніе множимыхъ отрѣзковъ на уголъ, въ первомъ случаѣ 90^0, а во второмъ 180^0. Для общаго случая умноженія произвольныхъ комплексовъ, остается въ силѣ опредѣленіе: умножить одно количество на другое значитъ произвести надъ множимымъ тѣ дѣйствія, посредствомъ которыхъ множитель составленъ изъ положительной единицы. При умноженіи a_α на b_β, такихъ дѣйствій будетъ два: умноженіе модулемъ b должно состоять въ удлиненіи или укороченіи a_α въ отношеніи b къ 1, что даетъ

результатъ $(ab)_\alpha$. Умноженіе амплитудой должно состоять во вращеніи $(ab)_\alpha$ на уголъ β, отчего получится $(ab)_{\alpha+\beta}$. Это и есть основной результатъ, который легко развивается на случай бо́льшаго числа производителей. Общее правило умноженія требуетъ перемноженія всѣхъ модулей производителей и сложенія всѣхъ амплитудъ. Такъ какъ основное правило умноженія вытекаетъ изъ двухъ опредѣленій—самаго комплекса и дѣйствія умноженія, то, значитъ, выводъ этотъ обусловленъ смѣшанной аргументаціей, т.-е. доказательствомъ. Въ свою очередь изъ правила умноженія вытекаютъ доказательно законы перемѣстительности и сочетательности. Вообще вся теорія является не безсвязнымъ сборникомъ предписанныхъ рецептовъ вычисленія, а прямымъ логическимъ развитіемъ опредѣленія дѣйствія. Изъ этой теоріи для нашей цѣли особо важенъ законъ распредѣлительности, а потому на доказательствѣ его я остановлюсь подробнѣе. Этотъ законъ, для умноженія модулемъ, выражается формулой $(a_\alpha+b_\beta)c=(ac)_\alpha+(bc)_\beta$. Равенство такое ясно изъ того, что при построеніи треугольника, подобнаго данному, посредствомъ удлиненія или укороченія одной изъ его сторонъ, нужно въ томъ же отношеніи измѣнить и остальныя стороны. Для послѣдующаго умноженія амплитудой, имѣемъ формулу $[(ac)_\alpha+(bc)_\beta]_\gamma=(ac)_{\alpha+\gamma}+(bc)_{\beta+\gamma}$. Это равенство обусловлено тѣмъ, что при вращеніи одной изъ сторонъ неизмѣняемаго треугольника на нѣкоторый уголъ, другія стороны поворачиваются на тотъ же уголъ.

Вышеизложенная геометрическая теорія комплексовъ примѣняется съ крайней простотой и безусловной общностью къ построенію всей тригонометріи по совершенно новой системѣ. При этомъ всѣ извѣстные выводы получаются новыми способами, съ которыми прежніе способы едва ли могутъ конкурировать. Для указываемаго примѣненія нужно дополнить изложенную теорію указаніемъ условій равенства комплексовъ $a+bi=c+di$, т.-е. отдѣльныхъ равенствъ $a=c$ и $b=d$. Условія эти вытекаютъ изъ того, что при равенствѣ двухъ векторовъ должны быть соотвѣтственно равны, какъ горизонтальныя, такъ и вертикальныя проекціи векторовъ. Замѣтимъ, далѣе, очевидное равенство $1_\alpha=\mathrm{Cs}\alpha+i\mathrm{Sn}\alpha$. Наконецъ, отмѣтимъ, что изъ правила умноженія слѣдуетъ $i^2=-1$.

Новый курсъ тригонометріи.

Изъ трехъ отдѣловъ элементарной чистой математики, тригонометрія лучше другихъ обработана въ научномъ отношеніи. Здѣсь нѣтъ тѣхъ грубыхъ ошибокъ въ опредѣленіяхъ и пріемахъ вывода, какія встрѣчаются въ ариѳметикѣ и алгебрѣ. И, все же, можно припомнить, что въ педагогической литературѣ еще недавно не различали понятій о синусѣ геометрическомъ и математическомъ, такъ что терминъ—линія синуса оказывался новымъ и чуть что не лишнимъ. Тригонометрическія величины и до сихъ поръ опредѣляютъ, во всѣхъ случаяхъ, какъ отношенія извѣстныхъ, направленныхъ въ плоскости, линій къ абсолютному радіусу, что несоотвѣтствуетъ дѣйствительному алгебраическому сравненію такихъ линій. Необходимое для обобщенія формулъ Декартово правило знаковъ смѣшиваютъ съ Декартовымъ же условіемъ конкретнаго представленія положительныхъ и отрицательныхъ количествъ. Формулы, доказанныя для частныхъ случаевъ, недостаточно отчетливо распространяютъ на общій случай.

Но и при устраненіи отмѣченныхъ главныхъ ошибокъ, курсъ тригонометріи подлежитъ еще важнымъ усовершенствованіямъ. Необходима бо́льшая общность выводовъ, избавляющая отъ разсмотрѣнія мелочныхъ обстоятельствъ въ довольно длинномъ рядѣ частныхъ случаевъ. Нужно объединеніе пріемовъ доказательствъ, представляющихъ до сихъ поръ излишнее разнообразіе, что свидѣтельствуетъ объ отсутствіи естественной системы построенія ученія. Нужны разъясненія того, какимъ путемъ и на какомъ основаніи возникли извѣстныя представленія, условія, опредѣленія. Резюмируя, скажу, что дѣйствительная законченность курса можетъ быть опредѣлена лишь такой общей системой, которая, развиваясь естественно, безъ всякихъ скачковъ и уклоненій въ сторону, объединяла бы рѣшительно всѣ частности ученія, устанавливая каждую изъ этихъ частностей на единственное, соотвѣтствующее ей, мѣсто и объясняя ее способомъ, по простотѣ таковою не допускающимъ измѣненія. Мой новый курсъ преслѣдуетъ, именно, такую цѣль. Въ его наличномъ изданіи онъ массивенъ, потому что содержитъ много дополнительныхъ статей и частныхъ подробностей, могущихъ представить спеціальный интересъ. Сущность же всего ученія можно изложить въ необычайно краткомъ видѣ. Этимъ я и займусь въ настоящей главѣ.

Основныя понятія.

Во введеніи, имѣющемъ на первыхъ страницахъ обычный характеръ, поясняется сначала возможность отысканія треугольника по даннымъ тремъ его элементамъ, между которыми имѣется хотя одинъ линейный. Затѣмъ, указываются преимущества числового рѣшенія сравнительно съ геометрическимъ построеніемъ. Устанавливается понятіе о линейномъ размѣрѣ угла: такъ какъ для даннаго угла отношеніе всякой соотвѣтствующей дуги къ ея радіусу, $\frac{s}{R}=\alpha$, есть число постоянное, то это число можно принять за мѣру угла, при чемъ единицей мѣры будетъ длина дуги при радіусѣ равномъ единицѣ; изъ предыдущей формулы вытекаетъ часто употребительное въ высшей математикѣ выраженіе дуги черезъ радіусъ, $s=R\alpha$. Въ концѣ введенія отмѣчаются двѣ совмѣстныхъ формулы для вычисленія линейнаго размѣра угла по градусному и наоборотъ; линейный размѣръ вычисляемъ по формулѣ $\alpha=\frac{A^0}{180^0}\cdot\pi$: градусный по обращенной $A^0=180^0 .\frac{\alpha}{\pi}$.

Простѣйшимъ треугольникомъ нужно считать прямоугольный. Форма его опредѣляется однимъ острымъ угломъ. Возьмемъ такой треугольникъ ABC, принимая катетъ $AB=c$ горизонтальнымъ слѣва направо, катетъ $BC=a$ вертикальнымъ снизу вверхъ и, значитъ, считая $AC=b$ гипотенузой. Уголъ A главный, C дополнительный. Выписавъ стороны въ порядкѣ a, b, c и затѣмъ въ обратномъ c, b, a, составляемъ отношенія $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$, называемыя тригонометрическими. Всѣ шесть чиселъ, выражающихъ эти отношенія, соотвѣтствуютъ углу A и съ измѣненіемъ этого угла измѣняются. Переходъ отъ порядка сторонъ a, b, c къ обратному c, b, a равносиленъ перестановкѣ катетовъ a и c или, значитъ, также угловъ A и C, а потому тѣ же шесть чиселъ можно считать соотвѣтствующими углу C. Но, въ этомъ случаѣ за первый порядокъ сторонъ нужно принять прежній обратный, а за второй—прежній прямой.

Если въ углѣ A проведемъ дугу радіусомъ, равнымъ 1, то всѣ шесть тригонометрическихъ отношеній можемъ представить длинами особыхъ шести линій, соотвѣтствующихъ этой дугѣ. Такъ окажется: $\frac{a}{b}=\mathrm{Sn}\,\alpha$ есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ конца

дуги на радіусъ, проходящій черезъ ея начало, $\frac{a}{c}$=Tgα есть длина отрѣзка касательной, проведенной въ началѣ дуги, до пересѣченія съ продолженнымъ радіусомъ, проходящимъ черезъ конецъ дуги, $\frac{b}{c}$=Scα есть длина отрѣзка сѣкущей, проходящей изъ центра до конца линіи тангенса.

Уголъ C можно перенести вершиной въ A, проведя въ этой точкѣ перпендикуляръ къ AB. Для перенесеннаго угла выберемъ направленіе, противоположно прежнему такъ, что начальной стороной будетъ новый перпендикуляръ, а конечной—общая сторона угловъ A и новаго C. Тогда, построивъ, по предыдущимъ опредѣленіямъ, линіи синуса, тангенса и секанса для угла C, найдемъ, что длины ихъ выражаются отношеніями второй группы. Разсматривая новыя линіи соотвѣтственно главному углу A, назовемъ ихъ косинусомъ, котангенсомъ и косекансомъ главнаго угла, такъ что $\frac{c}{b}$=Csα, $\frac{c}{a}$=Ctgα, $\frac{b}{a}$=Cscα. Каждая линія одного изъ дополнительныхъ угловъ есть соотвѣтствующая другого угла. Отсюда—формулы дополнительныхъ угловъ.

Соотношенія тригонометрическихъ чиселъ.

Выписавъ длины сторонъ въ порядкѣ a, b, c и въ обратномъ c, b, a, составимъ указанныя тригонометрическія числа: Sn$\alpha=\frac{a}{b}$, Tg$\alpha=\frac{a}{c}$, Sc$\alpha=\frac{b}{c}$, Cs$\alpha=\frac{c}{b}$, Ctg$\alpha=\frac{c}{a}$, Csc$\alpha=\frac{b}{a}$. Перемножая попарно взаимно обратныя числа, находимъ три формулы Snα.Cscα=1, Tgα.Ctgα=1, Scα.Csα=1. Выпишемъ затѣмъ Пиѳагорову связь между длинами сторонъ, т.-е. $a^2+c^2=b^2$. Раздѣливъ обѣ части равенства поочередно на b^2, на c^2, на a^2, выведемъ еще три формулы Sn$^2\alpha$+Cs$^2\alpha$=1, Tg$^2\alpha$+1=Sc$^2\alpha$ и 1+Ctg$^2\alpha$=Csc$^2\alpha$. По выведеннымъ шести формуламъ можно, зная одно тригонометрическое число, вычислить пять остальныхъ. При этомъ одна изъ формулъ будетъ оказываться лишней, но пригодной для провѣрки произведеннаго вычисленія.

Для удобства подобныхъ вычисленій увеличиваемъ число формулъ, связывающихъ тригонометрическія числа. Къ предыдущимъ шести формуламъ можно присоединить четыре новыхъ. Вообразимъ опредѣленія тангенса и котангенса равенствами Tg$\alpha=\frac{a}{c}$ и

$\mathrm{Ctg}\alpha=\frac{c}{a}$ и умножимъ члены каждаго отношенія на гипотенузу, отчего эти отношенія примутъ видъ $\frac{ab}{bc}$ и $\frac{bc}{ab}$. Разбивъ же каждую изъ полученныхъ дробей въ произведеніе двухъ простѣйшихъ, получимъ формулы $\mathrm{Tg}\alpha=\mathrm{Sn}\alpha.\mathrm{Sc}\alpha$ и $\mathrm{Ctg}\alpha=\mathrm{Cs}\alpha.\mathrm{Csc}\alpha$. Далѣе, выпишемъ тѣ же опредѣленія тангенса и котангенса и раздѣлимъ члены отношенія на гипотенузу, отчего отношенія примутъ видъ $\frac{a:b}{c:b}$ и $\frac{c:b}{a:b}$. Такое преобразованіе приводитъ къ формуламъ $\mathrm{Tg}\alpha=\frac{\mathrm{Sn}\alpha}{\mathrm{Cs}\alpha}$ и $\mathrm{Ctg}\alpha=\frac{\mathrm{Cs}\alpha}{\mathrm{Sn}\alpha}$. Каждую изъ десяти формулъ можно вывести самостоятельно изъ чертежа. Это даетъ рядъ геометрическихъ упражненій. Между формулами отдѣляемъ пять основныхъ такъ, чтобы въ отобранную группу входили всѣ шесть чиселъ. Остальныя формулы представляютъ алгебраическія слѣдствія основныхъ.

Отбрасываемъ опредѣленія секанса и косеканса и выписываемъ остальные четыре: $\frac{a}{b}=\mathrm{Sn}A$, $\frac{a}{c}=\mathrm{Tg}A$, $\frac{c}{b}=\mathrm{Cs}A$, $\frac{c}{a}=\mathrm{Ctg}A$. Отсюда —формулы соотношенія сторонъ прямоугольнаго треугольника: $a=b\mathrm{Sn}A$, $a=c\mathrm{Tg}A$, $c=b\mathrm{Cs}A$, $c=a\mathrm{Ctg}A$. Замѣнивъ здѣсь $A=90-C$, получимъ подобныя же формулы для угла C. Каждую изъ восьми формулъ можно вывести самостоятельно изъ чертежа. Присоединяемъ къ этимъ тригонометрическимъ формуламъ двѣ геометрическихъ $A+C=90$ и $a^2+c^2=b^2$. Показываемъ, что изъ послѣднихъ двухъ формулъ съ присоединеніемъ къ нимъ одной тригонометрической, напр., $a=b\mathrm{Sn}A$, можно вывести всѣ остальныя.

Помощью извѣстнаго выраженія хорды черезъ синусъ половины центральнаго угла, $a_n=2\mathrm{Sn}A_{2n}$, вычисляются тригонометрическія числа угловъ 60^0, 30^0, 45^0 и 18^0. Посредствомъ формулы удвоенія изъ теоріи правильныхъ многоугольниковъ, $a^2{}_{2n}=2-\sqrt{4-a^2{}_n}$, можно вычислить числа угловъ 15^0, $22^0\,30'$, 9^0, а черезъ обращеніе этой формулы сдѣлать то же для угла 36^0.

Предыдущія данныя позволяютъ рѣшать прямоугольные треугольники, когда въ нихъ входятъ углы, которыхъ тригонометрическія числа мы знаемъ или можемъ опредѣлить. Въ виду этого разсматриваются четыре основныхъ случая рѣшенія.

Отдѣлъ заканчивается построеніями остраго угла по данному его тригонометрическому числу. При этомъ выясняется, что такія построенія нужно дѣлать, вопреки обыкновенію, при радіусѣ неопредѣленномъ, что упрощаетъ дѣло.

Обобщеніе опредѣленій.

Отъ разсмотрѣнія остраго угла переходимъ къ тупому; это заставляетъ нѣсколько расширить опредѣленія тригонометрическихъ величинъ. Оказывается, что величины такія слѣдуетъ разсматривать, какъ не абсолютныя, а направленныя, въ смыслѣ положительности или отрицательности. Геометрическій синусъ есть перпендикуляръ, опущенный не на радіусъ, какъ говорили прежде, а на діаметръ, проходящій черезъ начало дуги. Направленіе его такое же, какъ прежде, и принимается за положительное. Геометрическій тангенсъ есть отрѣзокъ первой касательной, образуемый не продолженнымъ радіусомъ, а продолженнымъ въ ту или другую сторону діаметромъ, проходящимъ черезъ конецъ дуги. Направленіе его, противоположное прежнему, принимается за отрицательное. При построеніи секанса возникаетъ вопросъ о различеніи его направленія. Изъ подобія треугольниковъ на чертежѣ, видно, что абсолютныя величины синуса, тангенса и секанса удовлетворяютъ прежней формулѣ $Tg\alpha = Sn\alpha . Sc\alpha$. Для оправданія той же формулы въ алгебраическомъ смыслѣ, нужно считать секансъ отрицательнымъ. Это приводитъ къ сравненію направленія секанса съ направленіемъ подвижнаго діаметра, т.-е. къ установленію признака прохожденія секанса или непрохожденія черезъ конецъ дуги.

Съ другой стороны, выводъ изъ чертежа упомянутой формулы, въ ея алгебраическомъ смыслѣ, наталкиваетъ на Декартово правило знаковъ. Оно состоитъ въ томъ, что, при введеніи въ вычисленіе геометрической, завѣдомо отрицательной, величины, нужно передъ послѣдней ставить знакъ минусъ. Такимъ образомъ, въ пропорціи подобія треугольниковъ нужно вмѣсто абсолютныхъ длинъ линій ввести $Sn\alpha$, $-Tg\alpha$ и $-Sc\alpha$. Минусъ, упоминаемый въ Декартовомъ правилѣ, отнюдь не тотъ, которымъ отмѣчается отрицательность самой разсматриваемой величины. Это второй минусъ, формальный. Онъ переводитъ отрицательную величину въ положительную, каковая только и можетъ быть подставлена въ пропорцію на мѣсто входившей тамъ абсолютной величины.

Для построенія косинуса, котангенса и косеканса тупого угла, нужно найти дополнительный уголъ. Послѣдній опредѣляется выраженіемъ $\frac{\pi}{2} - \alpha$, т.-е. алгебраическимъ признакомъ постоянства

суммы угловъ, равной $\frac{\pi}{2}$. Въ данномъ случаѣ $\frac{\pi}{2}-\alpha$ должно быть отрицательно. Сопоставленіе этого обстоятельства съ чертежомъ приводитъ къ условію о выборѣ для дополнительной дуги второго начала и о противоположномъ отсчитываніи направленій для двухъ дополнительныхъ дугъ. Все это опредѣляется совершенно естественно и притомъ перманентно. Здѣсь законъ перманентности въ полной наличности, потому именно, что въ основу кладутся общіе, алгебраическіе признаки понятій.

Послѣ установленныхъ обобщеній, распространеніе на новый случай формулъ дополнительныхъ угловъ достигается уже простымъ замѣчаніемъ, что въ суммѣ $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ слагаемыя можно перемѣщать и что условія построенія какъ самихъ дополнительныхъ угловъ, такъ и ихъ тригонометрическихъ линій, соотвѣтствуютъ взаимно по ихъ полной однородности. Однако, въ виду отвлеченности этого замѣчанія, указывается и путь повѣрки его или самостоятельнаго доказательства любой изъ формулъ дополнительныхъ угловъ. Образчикъ подобнаго доказательства, взятый намѣренно изъ числа труднѣйшихъ, ведется во всеоружіи принятыхъ условій. Прежніе курсы не представляли образцовъ подобной тонкости разсужденія, доступной, однако, изучающимъ.

Вышеописанная система построенія ученія, вводя сначала понятія объ измѣняющихся съ измѣненіемъ угла отношеніяхъ сторонъ треугольника, въ дальнѣйшемъ замѣняетъ разсмотрѣніе отношеній изученіемъ свойствъ извѣстныхъ линій. Несомнѣнно преимущество второго разсмотрѣнія со стороны наглядности и возможности обобщенія. Естественный путь мышленія послѣдовательно приводитъ къ разсмотрѣнію общаго тригонометрическаго процесса измѣненія и сталкиваетъ насъ съ понятіями о тригонометрическихъ функціяхъ. Неуклонно приходимъ мы къ заключеніямъ, подобнымъ тому, что синусъ есть количество, положительное или отрицательное, выражающее длину и направленіе извѣстнаго перпендикуляра. Мы совершенно отходимъ отъ первоначальнаго узкаго понятія объ отношеніи сторонъ треугольника, вообще отъ отношенія какихъ-либо линій и осмысливаемъ въ понятіи синуса абстрактное дѣйствительное количество, извѣстнымъ образомъ представляемое геометрически. Свойства этого количества уподобляются свойствамъ геометрическаго представленія, но оба понятія, абстрактное и конкретное, остаются всегда различимыми.

Отмѣчаемый здѣсь переводъ числового представленія на линейное, принятый уже давно и общеизвѣстный, составляетъ, конечно, одно изъ геніальныхъ изобрѣтеній ума. Геометрическое представленіе раскрываетъ такія перспективы ученія, которыя иначе было бы трудно усмотрѣть. Весь процессъ измѣненія, какъ аргумента функцій, такъ и ихъ самихъ, представляется съ полной наглядностью. Также наглядной оказывается непрерывность измѣненій, численно вовсе не представимая. Ясны понятія о предѣлѣ, о безконечномаломъ, о нуляхъ и безконечностяхъ функцій. Періодичность прямыхъ функцій, многозначность обратныхъ, всѣ эти почти парадоксальныя, съ числовой точки зрѣнія, свойства функцій вполнѣ воспринимаются сознаніемъ. Однако, какъ было уже сказано, геометрическій методъ имѣетъ и крупный недостатокъ въ необходимости реализовать представленіе при каждомъ отдѣльномъ выводѣ и вслѣдствіе этого терять общность вывода. Каждое умозаключеніе на этомъ пути размѣнивается на частности, и требуется многократное разсмотрѣніе для установленія общности. Поэтому велика и идея Арганда, дающая въ тригонометріи обратный переводъ линейнаго представленія на числовое, но съ обобщеніемъ послѣдняго, съ характеристикой не линіи только, а плоскости, въ которой совершается тригонометрическій процессъ измѣненія. Именно эту идею Арганда, намѣченную авторомъ ея въ двухъ главныхъ этапахъ развитія, я развиваю детально на всемъ протяженіи тригонометрическаго ученія.

Теорія тригонометрическихъ функцій.

Основныя формулы соотношенія тригонометрическихъ функцій распространяются на произвольный уголъ обычнымъ путемъ. Именно здѣсь уже виденъ недостатокъ геометрическаго метода. Въ дальнѣйшемъ вездѣ примѣняется плоскостное исчисленіе. Главный признакъ плоскости выражается, примѣнительно къ тригонометріи, равенствомъ $1_\alpha = Cs\alpha + iSn\alpha$, при условіи $i^2 = -1$. Равенство это вѣрно при произвольномъ углѣ α. На основаніи указанной формулы и правила перемноженія комплексовъ, можно въ формулѣ Пиѳагора $1 = Cs^2\alpha + Sn^2\alpha$ разложить обѣ части на множителей въ видѣ $1_\alpha \cdot 1_{-\alpha} = (Cs\alpha + iSn\alpha)(Cs\alpha - iSn\alpha)$. Сокративъ затѣмъ множителей, равныхъ по основной формулѣ комплекса, получимъ формулу сопряженнаго комплекса $1_{-\alpha} = Cs\alpha - iSn\alpha$. Изъ предыдущаго вытекаютъ первыя формулы приведенія функцій, именно формулы

равнопротивоположныхъ угловъ. Такъ какъ $1_{-\alpha}=\mathrm{Cs}(-\alpha)+$ $+i\mathrm{Sn}(-\alpha)$, то, по условію равенства дѣйствительныхъ частей двухъ равныхъ комплексовъ и мнимыхъ частей, имѣемъ $\mathrm{Cs}(-\alpha)=\mathrm{Cs}\alpha$ и $\mathrm{Sn}(-\alpha)=-\mathrm{Sn}\alpha$, при всякомъ углѣ α.

Для вывода всѣхъ остальныхъ формулъ приведенія, соединимъ обѣ формулы комплексовъ въ одну $1_{\pm\alpha}=\mathrm{Cs}\alpha\pm i\mathrm{Sn}\alpha$ и будемъ послѣдовательно умножать вторую часть на i, а въ первой увеличивать аргументъ на $\frac{\pi}{2}=\delta$, что равносильно. При первомъ умноженіи получимъ $1_{\delta\pm\alpha}=\mp\mathrm{Sn}\alpha+i\mathrm{Cs}\alpha$, откуда слѣдуютъ формулы $\mathrm{Cs}(\delta\pm\alpha)=\mp\mathrm{Sn}\alpha$ и $\mathrm{Sn}(\delta\pm\alpha)=\mathrm{Cs}\alpha$. Умноживъ вторично, находимъ $1_{\pi\pm\alpha}=-\mathrm{Cs}\alpha\mp i\mathrm{Sn}\alpha$, откуда слѣдуетъ $\mathrm{Cs}(\pi\pm\alpha)=-\mathrm{Cs}\alpha$ и $\mathrm{Sn}(\pi\pm\alpha)=\mp\mathrm{Sn}\alpha$. При третьемъ умноженіи выходитъ $1_{3\delta\pm\alpha}=$ $=\pm\mathrm{Sn}\alpha-i\mathrm{Cs}\alpha$, т.-е. $\mathrm{Cs}(3\delta\pm\alpha)=\pm\mathrm{Sn}\alpha$ и $\mathrm{Sn}(3\delta\pm\alpha)=-\mathrm{Cs}\alpha$. При четвертомъ умноженіи имѣемъ $1_{2\pi\pm\alpha}=\mathrm{Cs}\alpha\pm i\mathrm{Sn}\alpha$, т.-е. $\mathrm{Cs}(2\pi\pm\alpha)=$ $=\mathrm{Cs}\alpha$ и $\mathrm{Sn}(2\pi\pm\alpha)=\pm\mathrm{Sn}\alpha$. Такимъ образомъ, доказываемъ кратчайшимъ путемъ и при всякомъ углѣ α всѣ формулы приведенія.

Для вывода теоремы сложенія функцій, беремъ формулы $1_\alpha=$ $=\mathrm{Cs}\alpha+i\mathrm{Sn}\alpha$ и $1_\beta=\mathrm{Cs}\beta+i\mathrm{Sn}\beta$ и перемножаемъ ихъ, въ первыхъ частяхъ по правилу сложенія амплитудъ, а во-вторыхъ частяхъ распредѣлительно. Получимъ $1_{\alpha+\beta}=\mathrm{Cs}\alpha\mathrm{Cs}\beta-\mathrm{Sn}\alpha\mathrm{Sn}\beta+i(\mathrm{Sn}\alpha\mathrm{Cs}\beta+$ $+\mathrm{Cs}\alpha\mathrm{Sn}\beta)$. Отсюда, черезъ сравненіе дѣйствительныхъ и мнимыхъ частей, находимъ $\mathrm{Cs}(\alpha+\beta)=\mathrm{Cs}\alpha\mathrm{Cs}\beta-\mathrm{Sn}\alpha\mathrm{Sn}\beta$ и $\mathrm{Sn}(\alpha+\beta)=$ $\mathrm{Sn}\alpha\mathrm{Cs}\beta+\mathrm{Cs}\alpha\mathrm{Sn}\beta$. Теорема доказана сразу для синуса и косинуса и безъ всякаго ограниченія относительно угловъ α и β.

Рѣшеніе вопроса о разложеніи синуса и косинуса въ ряды ставитъ эту теорію съ самаго начала ея въ естественную связь съ теоріей показательныхъ функцій e^x и e^{xi}, что прежде усматривалось, наоборотъ, какъ вполнѣ неожиданное послѣдствіе добытыхъ инымъ путемъ рядовъ. Благодаря этой связи, находимъ формулу $1_\alpha=\lim\limits_{n=\infty}\left(1+i\frac{\alpha}{n}\right)^n$. Разложеніе второй части по биному Ньютона даетъ, послѣ обработки при n безгранично-возрастающемъ, основной рядъ $1_\alpha=1+\alpha i+\frac{\alpha^2 i^2}{1.2}+\frac{\alpha^3 i^3}{1.2.3}+\cdots\cdots$ Сравнивая здѣсь дѣйствительныя и мнимыя части, выводимъ $\mathrm{Cs}\alpha=1-\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}-\cdots\cdots$ и $\mathrm{Sn}\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\cdots$

Дополненія.

Изъ предыдущихъ сжатыхъ указаній видно, насколько естественно, кратко и просто строится по новому методу все основное тригонометрическое ученіе. Никакая иная система не можетъ конкурировать съ описанной. Между прочимъ, тотъ же методъ разрѣшаетъ самымъ прямымъ путемъ вопросъ о разложеніи всѣхъ элементарныхъ функцій въ ряды. Въ выводахъ рядовъ для двухъ обратныхъ функцій — логариѳма и арктангенса обнаруживается рѣзкая аналогія, раньше не замѣченная. Съ особой простотой выводятся и формулы соотношенія сторонъ и угловъ треугольника. Записываемъ только, что во всякомъ треугольникѣ комплексная сумма двухъ сторонъ равна третьей сторонѣ, принятой за основаніе, и немедленно, сравнивъ въ этомъ равенствѣ дѣйствительныя и мнимыя части, выводимъ двѣ главныя формулы, въ сущности уже заключающія въ себѣ все содержаніе, исчерпывающее вопросъ, такъ какъ остальныя формулы суть лишь слѣдствія этихъ главныхъ. Не довольствуясь этимъ и лишь немного развивая тотъ же методъ, раскрываемъ другія важныя данныя. Также примѣняемъ методъ къ раскрытію нѣкоторыхъ свойствъ многоугольниковъ.

Помимо оцѣнки впервые оформленныхъ нормальныхъ способовъ построенія всей тригонометріи и разложенія элементарныхъ функцій въ ряды, безпристрастная критика могла бы обратить вниманіе на другія, менѣе важныя, достоинства книги. Отмѣчу, напр., краткую статью о составленіи общихъ выраженій обратныхъ круговыхъ функцій и своеобразное, по сжатости, объясненіе всѣхъ деталей рѣшенія тригонометрическихъ уравненій. Можно было бы обратить вниманіе на обширный и систематизированный сборникъ задачъ по всѣмъ отдѣламъ курса, на особо подробный разборъ случаевъ рѣшенія треугольниковъ. Посмотримъ теперь, какъ отнеслась къ дѣлу критика Ученаго Комитета, выраженная рецензіей профессора К.. Раньше, эту несравненную по особымъ качествамъ рецензію я разобралъ въ отдѣльной брошюрѣ дословно.

Критика курса тригонометріи.

Сознавая, видимо, свою формальную безотвѣтственность, критикъ прежде всего заявляетъ: [Плоскостное исчисленіе автора представляетъ собою пеструю и весьма слабо изложенную смѣсь основныхъ понятій теоріи проекцій и теоріи комплексныхъ чиселъ].

Чтобы оцѣнить сказанное, я предлагаю читателю пересмотрѣть вновь—изложенныя выше, передъ предыдущей главой, основанія этого исчисленія. Несомнѣнно, что тамъ никакой теоріи проекцій нѣтъ. Все же изложеніе не имѣетъ и ничего общаго съ обычной теоріей комплексныхъ чиселъ. Ясно, значитъ, что это изложеніе не можетъ представлять ни слабую, и никакую иную смѣсь ученій, которыя тамъ оба отсутствуютъ.

Нисколько, однако, не стѣсняясь ложностью высказаннаго заявленія, г. К. продолжаетъ: [Изложеніе настолько неудовлетворительно, что, напр., нѣтъ опредѣленія понятія о направленіи отрѣзка, а, слѣдовательно, и объ углѣ между двумя отрѣзками]. Итакъ, по мнѣнію критика, въ серединѣ курса тригонометріи, изложивъ уже значительную часть этого отдѣла математики и поговоривъ тамъ о всякихъ углахъ, а также о разнообразныхъ направленіяхъ тригонометрическихъ линій, нужно было начать говорить объ основныхъ понятіяхъ—прямой линіи и углѣ между двумя прямыми. Такая система, видно, не была бы пестрой и слабой. Аналогично этому можно, значитъ, негодовать на то, что, напр., въ геометріи при доказательствѣ, положимъ, Птоломеевой теоремы, разсматриваютъ прямо подобіе треугольниковъ, а упускаютъ изъ виду дать опредѣленіе того, что называется треугольникомъ и т. под.. Кажется, до такой безцеремонной фальшивости никогда еще критика не доходила.

Продолжая обзоръ излагаемой мною геометрической теоріи комплексовъ, рецензентъ говоритъ: [Естественность изложенія проявляется въ томъ, что авторъ извратилъ естественный и строгій ходъ мысли и построилъ тригонометрію на свойствахъ комплексныхъ чиселъ, въ то время, какъ сами эти свойства должны быть выведены изъ тригонометріи, какъ это, казалось бы, всѣмъ извѣстно]. Дѣйствительно, если не всѣмъ, то, очевидно, самому г. К. извѣстенъ былъ только выводъ свойствъ комплексовъ изъ тригонометріи. Напомню читателю сдѣланный уже мною разборъ логичности такого вывода. Въ немъ, приступая къ строгому, якобы, анализу дѣйствій съ комплексами, начинаютъ съ преобразованія выраженія $a+bi$ по формуламъ $a=r\mathrm{Cs}\varphi$ и $b=r\mathrm{Sn}\varphi$, которыя, въ дѣйствительности, заимствованы изъ геометрическаго представленія, а внѣ его оказываются подтасованными. Вслѣдъ за подстановкой, выводятъ r за скобки, хотя свойство распредѣлительности еще не доказано. Послѣ такого, уже состоявшагося утилизированія одного изъ свойствъ еще не разсмотрѣннаго и никакой характеристикой не опредѣленнаго умноженія, начинаютъ выво-

дить основное правило этого дѣйствія, но при этомъ опять-таки пользуются даже послѣдствіями свойства распредѣлительности, какъ и другими свойствами того же, казалось бы, только еще анализируемаго дѣйствія. Въ нормальной логикѣ подобный ходъ мысли называется ложнымъ кругомъ.

Однако, не усматривая самъ подобныхъ недостатковъ обычной манеры построенія ученія, г. К. имѣетъ безцеремонность заявлять по поводу приводимаго мною доказательства теоремы сложенія тригонометрическихъ функцій: [Немудрено, конечно, что у автора доказательство этой теоремы выходитъ простымъ и общимъ, когда при этомъ доказательствѣ онъ скрытымъ образомъ пользуется самою доказываемою теоремой]. Доказательство, вмѣстѣ со всѣми его основаніями, приведено выше въ настоящей книгѣ. Разумѣется, всякому ясно, что заявленіе критика ложно. Въ своей прежней брошюрѣ я потребовалъ объясненій по этому поводу. Тогда профессоръ развилъ, въ упомянутомъ уже письмѣ къ редактору, свое каллиграфическое опроверженіе опредѣленія умноженія, которое я примѣняю въ основахъ исчисленія. Характерно, въ этомъ пунктѣ рецензіи, еще то обстоятельство, что инкриминируемое доказательство теоремы сложенія приписывается мнѣ, тогда какъ оно сто лѣтъ тому назадъ было указано Аргандомъ. Ясно, что съ теоріей этого мыслителя, оцѣненной давно уже Гауссомъ, Коши, Уэлемъ и многими другими, авторитетный членъ нашего Ученаго Комитета не былъ совершенно знакомъ, хотя и подвергалъ ее, въ моемъ развитіи, своей неумолимой критикѣ.

„Изданіе книги", говорю я въ предисловіи къ курсу тригонометріи, „имѣетъ первою цѣлью показать, что примѣненіе къ тригонометріи алгебраическаго метода изложенія, расширеннаго введеніемъ самыхъ простыхъ основъ плоскостнаго исчисленія, позволяетъ построить всю систему тригонометріи естественно и общѣе, чѣмъ достигалось это до сихъ поръ примѣненіемъ обычнаго геометрическаго метода. Вторая цѣль показать, что элементарный математическій анализъ можетъ быть совершенно обособленъ отъ высшаго, такъ какъ, благодаря новой постановкѣ вопроса о разложеніи всѣхъ элементарныхъ функцій въ ряды, эта труднѣйшая задача разрѣшается алгеброй самостоятельно". Критическую оцѣнку моего выполненія первой задачи мы сейчасъ видѣли и могли оцѣнить ее въ свою очередь. О выполненіи второй задачи рецензентъ говоритъ: [Какая же заслуга въ томъ, чтобы обособить элементарный анализъ отъ высшаго, да и развѣ трудно это сдѣлать].

Критикъ считаетъ нормальнымъ, чтобы изложеніе тригонометріи обходилось безъ строгаго и практически удобнаго разрѣшенія вопроса о вычисленіи тригонометрическихъ функцій. Извѣстно, однако, что этотъ вопросъ для тригонометріи есть самый главный, и что именно для его разрѣшенія вся тригонометрія и была создана. Если бы задача обособленія элементовъ не заслуживала вниманія, то надо думать, что Декартъ, Эйлеръ и другіе математики не дѣлали бы попытокъ къ ея рѣшенію. Извѣстно, что способы вычисленія элементарныхъ функцій, указанные этими учеными, не совсѣмъ удовлетворительны, или по недостатку строгости анализа, или по сложности его. Вслѣдствіе этого рѣшеніе насущныхъ задачъ теоріи элементарныхъ функцій по необходимости относилось къ высшему анализу. Слѣдовало бы признать моей заслугой то, что, давъ новый, вполнѣ элементарный выводъ формулы, аналогичной формулѣ Эйлера, и совершенно въ духѣ идей Арганда, я пріурочилъ къ этой единственной формулѣ всѣ разложенія и обосновалъ ихъ такъ, что всѣ раньше извѣстныя замѣчанія объ этихъ разложеніяхъ получаются естественно и самыми прямыми путями.

По компетентному мнѣнію профессора К., обособить элементарный анализъ отъ высшаго нисколько не трудно: [Стоитъ только расположить теоремы такъ, чтобы послѣдующія вытекали изъ предыдущихъ, потомъ въ любомъ мѣстѣ поставить черту, назвать то, что до этой черты, элементарнымъ анализомъ, остальное высшимъ и—дѣло сдѣлано]. Подобный, оригинальный принципъ систематизаціи, конечно, никѣмъ еще не былъ примѣненъ. Несомнѣнно, онъ очень простъ, но проста также и логическая оцѣнка его. Оказывается, что нашъ критикъ видитъ во всемъ математическомъ анализѣ однѣ только взаимно связанныя теоремы, не усматривая того, что естественными гранями для систематизаціи ученія являются отнюдь не теоремы, зачастую и не имѣющія ни малѣйшей связи, а опредѣленія постепенно вводимыхъ понятій. Полагаю, что не послѣдовательность будто бы однородныхъ, вытекающихъ одна изъ другой, теоремъ, а различіе существа понятій изолируетъ ариѳметику, алгебру, тригонометрію, дифференціальное исчисленіе, интегральное, варіаціонное. Слѣдуя въ точности принципу новаго систематизатора науки, какимъ заявилъ себя профессоръ, и лишь замѣнивъ понятіе о теоремѣ понятіемъ о математическомъ положеніи вообще, можно поставить черту между опредѣленіемъ умноженія дробей и правиломъ такого умноженія, отнеся первое въ элементарный анализъ, а второе въ выс-

шій. На томъ же основаніи можно правило дифференцированія суммы отнести къ элементарному анализу, а дифференцированіе произведенія къ высшему, и вообще работу ума, систематизирующаго отдѣлы науки, замѣнить движеніемъ перста, указующаго— отселева и доселева.

[Насколько мы могли понять], говоритъ рецензентъ, [все дѣло въ томъ, что автору непремѣнно хочется включить въ элементарную алгебру разложенія функцій въ ряды. Не знаемъ, зачѣмъ это нужно, но спорить противъ этого не будемъ, это дѣло вкуса]. Итакъ, дѣло вкуса изложить, напр., теорію логариѳмовъ съ указаніемъ способа вычисленія ихъ, или безъ этого указанія. А то обстоятельство, что логариѳмы только и вводятся въ науку ради признанной полезности вычисленія ихъ, не идетъ, видно, къ дѣлу. Съ такимъ же правомъ можно, значитъ, и теорію эллиптическихъ функцій излагать безъ указанія способа вычисленія ихъ. Хотя при этомъ теорія потеряетъ всю свою практическую цѣнность и сохранитъ лишь относительно малый теоретическій интересъ, но какое дѣло до этого тому, кто руководится лишь своимъ вкусомъ.

[Но не можемъ согласиться], продолжаетъ г. К., [съ сужденіями автора по этому поводу. Труднѣйшая, по мнѣнію автора, задача есть на самомъ дѣлѣ легчайшая, какъ извѣстно всѣмъ, знакомымъ съ дифференціальнымъ исчисленіемъ]. Въ предисловіи моемъ я говорю о задачѣ разложенія, какъ труднѣйшей для элементарнаго анализа. Относительно же дифференціальнаго исчисленія тамъ же въ предисловіи упоминаю, что оно рѣшаетъ эту задачу просто и строго, подразумѣвая, конечно, что рѣчь идетъ объ элементарныхъ функціяхъ, къ каковымъ только и можетъ относиться заявленіе о простотѣ. Критикъ подтасовалъ мои слова, отнеся ихъ къ другой области. Но и при такой своеобразной манерѣ диспута, утвержденіе г. К. оказывается разсчитаннымъ, обратно его указанію, лишь на лицъ, не знакомыхъ съ дифференціальнымъ исчисленіемъ. На самомъ дѣлѣ, это исчисленіе, разрѣшая легко задачи объ изысканіи нѣкоторыхъ общихъ свойствъ функцій, о раскрытіи неопредѣленныхъ видовъ, о максимумѣ и минимумѣ, въ то же время не способно разрѣшить съ достаточной практической общностью задачи о разложеніи въ ряды. Извѣстно, что даже для элементарныхъ функцій, какъ арксинусъ или арктангенсъ, способъ дифференціальнаго исчисленія оказывается сложнымъ, и потому разложенія этихъ функцій выводятся интегральнымъ исчисленіемъ.

Одна изъ часто практикуемыхъ особенностей критики г. К. заключается, какъ мы уже видѣли, въ томъ, что этотъ рецензентъ прибѣгаетъ непосредственно къ совершенно ложнымъ утвержденіямъ, наличность которыхъ трудно объяснить только недоразумѣніемъ или непониманіемъ дѣла. Продолжая говорить о примѣняемомъ мною способѣ разложенія въ ряды, онъ заявляетъ: [Новая постановка вопроса о разложеніи всѣхъ элементарныхъ функцій въ ряды есть на самомъ дѣлѣ не что иное, какъ давнымъ давно извѣстный способъ разложенія показательной функціи въ рядъ, при чемъ она разсматривается, какъ предѣлъ степени, и затѣмъ отдѣленія четныхъ и нечетныхъ степеней перемѣннаго]. Способъ отдѣленія четныхъ и нечетныхъ степеней въ разложеніи показательной функціи разсматривается одинаково во всѣхъ курсахъ анализа. Но тамъ исходятъ изъ извѣстныхъ напередъ разложеній показательной функціи, синуса и косинуса и изъ нихъ выводятъ формулу Эйлера, связывающую эти три функціи. Я же, во-первыхъ, вывожу не дифференціальнымъ исчисленіемъ, а элементарно, формулу не Эйлера, а равносильную ей. Затѣмъ, совершенно обратно извѣстному пути, вывожу изъ этой формулы—разложенія функцій, такъ что смѣшать подобныя противоположности, казалось бы, совершенно немыслимо.

Въ слѣдующемъ пунктѣ рецензіи, упрекая меня въ томъ, что я, стремясь къ нововведеніямъ, не выполняю, якобы, [скромныхъ, но важныхъ требованій хорошаго изложенія], г. К. заявляетъ: [Достаточно сказать, что онъ], т.-е. авторъ, [не опредѣлилъ, какъ слѣдуетъ, понятія о тригонометрическихъ величинахъ]. Между тѣмъ, слѣдящей за педагогической литературой публикѣ должно быть извѣстно, что именно я ввелъ еще въ старомъ своемъ курсѣ тригонометріи тѣ термины и опредѣленія, которые теперь распространяются и приняты даже въ официальныхъ текстахъ программъ. Стремясь установить въ наукѣ, претендующей на точность мысли и языка, прежде всего сознательное различеніе различимыхъ философски основныхъ понятій, я во всѣхъ своихъ сочиненіяхъ изолирую такія понятія, какъ величина, размѣръ, отношеніе, число, количество, модуль. Именно въ тригонометріи, необходимость такого изолированія представляется ясной. Вообразимъ, для примѣра, обыкновенный тригонометрическій чертежъ окружности съ радіусомъ, напр., въ 10 линейныхъ единицъ и съ геометрическимъ синусомъ угла въ 210^0. Величиною здѣсь является самая линія синуса, въ которой ради цѣлей тригонометріи мы разсматриваемъ

два признака—длину и линейное направленіе, хотя для другихъ цѣлей могли бы разсматривать другіе признаки, напр., направленіе на плоскости, направленіе въ пространствѣ и даже еще иные. Размѣръ величины есть длина линіи, выражаемая въ принятыхъ единицахъ абсолютнымъ числомъ 5. Отношеніе разсматриваемой линіи къ радіусу выражается съ ариѳметической точки зрѣнія абсолютнымъ числомъ $\frac{1}{2}$, въ алгебрѣ дѣйствительныхъ количествъ отрицательнымъ количествомъ $-\frac{1}{2}$, въ алгебрѣ мнимыхъ—количествомъ $-\frac{i}{2}$ и можетъ быть выражено еще иначе и значительно сложнѣе. Математическій же синусъ есть только $-\frac{1}{2}$, а модуль его $\frac{1}{2}$. Частное понятіе нельзя называть терминомъ общаго. Поэтому и математическій синусъ не есть отношеніе, каковое, видимъ, можетъ быть совершенно инымъ.

Не довольствуясь явно ложными утвержденіями въ крупныхъ пунктахъ критики, г. К. прибѣгаетъ къ подобному же пріему укрѣпленія своей рецензіи и въ мелочахъ. Такъ, изъ страницы 22-й выхватываются мои слова „обозначивъ по числу сторонъ многоугольника"…. и читателю заявляется: [Неизвѣстно какого, ибо ни о какомъ многоугольникѣ не говорилось]. Между тѣмъ, весь параграфъ, содержащій упомянутыя слова, трактуетъ только о правильныхъ многоугольникахъ, и объ этомъ за 15 строкъ раньше, въ началѣ параграфа, напередъ сказано.

На стр. 91-й я, говоря о неравенствахъ $Sn\alpha < \alpha < Tg\alpha$ съ цѣлью вывода извѣстныхъ границъ синуса и косинуса малаго угла, именно, въ дальнѣйшемъ, угла въ одну минуту, говорю, что „дуга всякаго малаго остраго угла больше соотвѣтствующаго синуса и меньше соотвѣтствующаго тангенса". По этому поводу критикъ внушаетъ читателю: [Оказывается, что только для малаго остраго угла дуга больше синуса и меньше тангенса]. Однако, слова „только" въ моей рѣчи не имѣется, и, значитъ, искаженіе смысла этой рѣчи подтасовано ложно.

Я уже упоминалъ о томъ, что профессоръ К. часто сокращаетъ свои авторитетныя возраженія до крайняго минимума ихъ формы, ограничиваясь выпиской указаній автора и уснащая ихъ постановкой восклицательныхъ и вопросительныхъ знаковъ. При всей краткости подобныхъ сужденій, они, однако, краснорѣчиво говорятъ…… о собственномъ научномъ развитіи профессора. Напр., въ рецензіи написано: [По мнѣнію автора, Декартовское правило

знаковъ состоитъ въ томъ, что, вводя въ вычисленіе геометрическую, завѣдомо отрицательную величину, нужно брать ее со вторымъ знакомъ минусъ (??!)] Критикъ, наставивъ по поводу выписаннаго имъ моего указанія рядъ знаковъ удивленія, далъ мнѣ лишній случай констатировать фактъ, описанію котораго въ исторіи математическаго образованія могли бы безъ приводимаго очевиднаго свидѣтельства и не повѣрить. Нельзя не считать курьезнымъ обстоятельствомъ, что не только г. К., вкупѣ съ единомышленными членами Ученаго Комитета, а, какъ приходилось мнѣ убѣждаться, многіе изъ нашихъ спеціалистовъ математиковъ понимаютъ Декартовское правило знаковъ въ томъ его, наивномъ, освѣщеніи, какое вошло въ обиходъ нашей литературы съ легкой руки малосвѣдущаго, но многоизвѣстнаго составителя популярныхъ учебниковъ. Они подъ такимъ названіемъ подразумѣваютъ условіе Декарта о различеніи противоположныхъ длинъ знаками $+$ и $-$. То обстоятельство, что условіе должно логически примыкать къ области опредѣленій, а не правилъ, еще не разъясняетъ дѣла, потому что путаница въ философскихъ терминахъ встрѣчается у всякихъ спеціалистовъ сплошь и рядомъ, и съ ней считаться трудно. Но характерно то, что даже при опредѣленномъ и точномъ выраженіи правила и при отчетливомъ разъясненіи на примѣрахъ, оно до сихъ поръ вызываетъ удивленіе критики. Положимъ, для примѣра, что разсматривается дуга α, оканчивающаяся во второй четверти, и обозначимъ абсолютные размѣры тангенса, синуса и косинуса соотвѣтственно черезъ T, S и C. Изъ подобія треугольниковъ имѣемъ ариѳметическую пропорцію $\frac{T}{S}=\frac{1}{C}$ съ абсолютными числами. Вводя же въ разсматриваемое вычисленіе самыя тригонометрическія количества, изъ которыхъ тангенсъ и косинусъ отрицательны, мы дѣлаемъ замѣну по формуламъ $T=-\mathrm{Tg}\alpha$, $S=\mathrm{Sn}\alpha$ и $C=-\mathrm{Cs}\alpha$, послѣ чего, примѣнивъ еще правила знаковъ дѣленія и умноженія, находимъ алгебраическую формулу $\mathrm{Tg}\alpha=\frac{\mathrm{Sn}\alpha}{\mathrm{Cs}\alpha}$ съ положительными и отрицательными количествами. Замѣна, выполненная здѣсь, именно и совершается по общему мнемоническому правилу, сплошь и рядомъ примѣняемому, какъ въ тригонометріи, такъ и въ аналитической геометріи, устраняющему при его запоминаніи особыя для каждаго случая разсужденія о сравненіи абсолютныхъ чиселъ съ количествами.

[„Это не будетъ“], говорю я далѣе въ книгѣ, [„знакъ прежней отрицательности (?), а минусъ новый, формальный (?), дѣлающій

вставляемое количество двояко отрицательнымъ, т.-е. по существу положительнымъ“]. Но даже и эта часть объясненія не понятна критику и его товарищамъ въ Комитетѣ, санкціонирующимъ тѣ же вопросительные знаки, какъ и вообще всю рецензію. Предположимъ, приходится объяснять, что количество $a = -3$ отрицательно, и, условившись въ такомъ обозначеніи, разсмотримъ другое количество $-a$, въ обозначеніи котораго передъ прежней буквой поставленъ знакъ $-$. Я говорю, именно, то, что это второе количество не будетъ, какъ первое, существенно отрицательнымъ, а его нужно считать только формально отрицательнымъ, затѣмъ, по совокупности двухъ знаковъ, ясныхъ изъ формы $-(-3)$, двояко отрицательнымъ и, наконецъ, по существу, какъ равное $+3$, положительнымъ. Вѣдь, это указаніе относится къ элементарнѣйшему правилу двойныхъ знаковъ Коши, безъ примѣненія котораго нельзя научно доказать даже простѣйшихъ правилъ сложенія и вычитанія одночленовъ и многочленовъ, не говоря уже о множествѣ другихъ теоремъ и правилъ алгебры и тригонометріи. Правда, распространенные учебники объ этомъ правилѣ не говорятъ. Но казалось бы, не однимъ матеріаломъ этихъ учебниковъ долженъ измѣряться уровень пониманія дѣла.

Курсъ анализа профессора К.

Изъ предыдущаго ясно, каковъ дѣйствительный авторитетъ офиціальныхъ руководителей нашего математическаго образованія. Я могъ бы предыдущей главой закончить настоящую книгу. Но позволю себѣ сдѣлать еще небольшое дополненіе. Разберу нѣсколько элементарныхъ, понятныхъ многимъ читателямъ, деталей курса высшаго анализа, составленнаго и напечатаннаго профессоромъ К..

Нужно имѣть въ виду, что курсъ, составленный экзаминаторомъ по предмету, является для студентовъ обязательнымъ. Каковы бы ни были качества этого курса, его неизбѣжно тщательно изучать и считаться съ нимъ въ экзаменаціонныхъ отвѣтахъ. Каждый профессоръ, самовластный въ своей сферѣ, смотритъ на предметъ съ своей точки зрѣнія. Въ особенности это касается лично оригинальныхъ измышленій, какъ говорится,—коньковъ.

Введеніе курса.

Курсъ профессора К. начинается очень издалека, съ опредѣленія единицы, конкретной и отвлеченной. Затѣмъ, на нѣсколькихъ страницахъ указываются, почему-то, нѣсколько положеній изъ

элементарной теоріи дѣйствій съ числами. Всѣ эти положенія не имѣютъ никакого отношенія, ни вообще къ дальнѣйшему, ни въ особенности къ анализу безконечномалыхъ. Оригинальнымъ въ этомъ изложеніи является уже отмѣченное выше утвержденіе о невозможности вычитанія при равенствѣ уменьшаемаго и вычитаемаго.

Особая логика.

Дальше изложено по Дедекинду ученіе о несоизмѣримомъ числѣ. Здѣсь оригинальное мышленіе высказывается также лишь въ одномъ пунктѣ, въ изобрѣтеніи небывалаго логическаго аргумента доказательства. Говоря о расположеніи всѣхъ раціональныхъ чиселъ въ два ряда такъ, что каждое изъ чиселъ одного ряда меньше каждаго изъ чиселъ другого ряда, профессоръ принимаетъ, согласно со всѣми, что всякое раціональное число должно занимать мѣсто лишь въ одномъ изъ этихъ рядовъ, но объясняетъ это тѣмъ, что разсматриваемое число [не можетъ быть больше или меньше самого себя]. Такимъ образомъ, вмѣсто ссылки, какъ должно бы быть, на однозначность всякаго числа, обсуждаются немыслимыя никѣмъ неравенства.

Постулатъ теоріи мнимыхъ.

Приступая къ теоріи мнимыхъ количествъ, г. К. заявляетъ: [Такъ какъ для вещественныхъ чиселъ справедливо равенство $\sqrt{AB}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$, то условились примѣнять это равенство къ выраженіямъ вида $\sqrt{\alpha}$, гдѣ $\alpha<o$, хотя эти выраженія, взятыя сами по себѣ, и не имѣютъ реальнаго смысла]. Таково основное условіе, или главный постулатъ теоріи мнимыхъ. Однако, онъ прямо противорѣчитъ обычному ученію. Обыкновенно, вѣдь, даже въ малограмотной рецептурной системѣ построенія теоріи мнимыхъ, распространяя условно на эти количества всѣ правила алгебраическихъ дѣйствій, все же оговариваются, что правило перемноженія корней, т.-е. $\sqrt{A}.\sqrt{B}=\sqrt{AB}$ такому распространенію не подлежитъ. А что указанный постулатъ соотвѣтствуетъ именно перемноженію корней, видно изъ того, что, вѣдь, аксіома о перестановкѣ частей равенства въ формулировкѣ условія не отрицается, а о корняхъ говорится въ множественномъ, слѣдовательно, въ основномъ случаѣ, двойственномъ числѣ. Характерно еще то, что и въ высшемъ анализѣ, такъ же, какъ въ начальныхъ учебникахъ, теорія мнимыхъ строится путемъ полюбовныхъ соглашеній, и самыя количества аттестуются попрежнему, какъ не имѣющія реальнаго

смысла. Значитъ, вся теорія функцій мнимаго перемѣннаго, вытекающая не изъ полюбовныхъ соглашеній, а изъ реальныхъ свойствъ плоскости, и составляющая ядро современнаго высшаго анализа, нашему профессору неизвѣстна, или имъ авторитетно отрицается.

Новая теорія мнимыхъ.

Самую теорію мнимыхъ количествъ г. К. излагаетъ совершенно новымъ способомъ. Онъ не хочетъ разсматривать это ученіе подъ Гауссовымъ условіемъ $i^2 = -1$. По мнѣнію профессора, теорія мнимыхъ заключается въ изысканіи остатковъ отъ дѣленія выраженій на двучленъ i^2+1, каковой прежде всѣ считали абсолютнымъ нулемъ. Не объясняется, при этомъ, съ какой стати математикамъ можетъ придти въ голову создавать теорію остатковъ отъ дѣленія на указанное выраженіе, а не на какое либо иное, напр., на $i^7 - 2i^4 + 5$. Основаніемъ новой теоріи, повидимому, служитъ распространеніе на разсматриваемое дѣленіе того извѣстнаго положенія, что подстановка въ дѣлимомъ $f(x)$ частнаго значенія $x = -a$, уничтожая въ равенствѣ $f(x) = Q(x+a) + R$ произведеніе частнаго Q на дѣлителя $x+a$, приводитъ къ опредѣленію остатка R. Но, при доказательствѣ этого положенія, количество x необходимо считать перемѣннымъ, способнымъ принимать не только значеніе $x = -a$, но и другія, уклоняющіяся отъ разсматриваемаго, при каковыхъ только и мыслимы, какъ самое дѣленіе, такъ и исходная въ доказательствѣ связь между дѣлимымъ, дѣлителемъ, частнымъ и остаткомъ. Въ данномъ же случаѣ, количество i есть абсолютное постоянное. Ясно, значитъ, что развиваемая искусственной подтасовкой теорія не имѣетъ подъ собой почвы, ни логической, ни математической. Если же принципъ, подтасованный подъ дѣйствительные факты, не расходится съ таковыми, то это объясняется, вопреки взгляду, отмѣченному во введеніи къ курсу, тѣмъ, что нуль, какъ и всякое конечное число, подчиняется свойствамъ дѣйствій, а никакъ не является указателемъ невозможности. Замѣтимъ еще, что разсматриваемая теорія приводитъ безъ всякой надобности къ несообразно сложнымъ вычисленіямъ. Напр., при доказательствѣ того, что выраженіе $(a+bi)^n$ представляетъ комплексъ обычнаго вида, приходится не довольствоваться, по раскрытіи скобокъ, отдѣленіемъ четныхъ и нечетныхъ степеней i, а производить дѣленіе многочлена n-ой степени на i^2+1, каковое дѣйствіе, по сложности и недостаточной опредѣленности его, казалось бы, нѣтъ смысла производить.

Непрерывная величина.

Покончивъ съ алгебраическими представленіями о количествахъ, г. К. переходитъ къ понятіямъ анализа и устанавливаетъ опредѣленіе непрерывной „величины". Онъ говоритъ, во-первыхъ: [Значеніями нѣкоторой перемѣнной величины называются тѣ числа, которымъ можетъ равняться эта величина. Совокупность этихъ чиселъ называется областью значеній данной величины]. Нельзя не отмѣтить здѣсь грубой неточности математической рѣчи. Понятіе о величинѣ и числѣ оказываются уподобленными. Число можетъ равняться величинѣ, каковая, однако, неопредѣленна и можетъ оказаться, напр., площадью, объемомъ, вѣсомъ и т. под.. Примѣненіе къ такой рѣчи аксіомы о равенствѣ двухъ величинъ третьей приведетъ къ заключенію, что площадь равна вѣсу и т. под..

Самое опредѣленіе непрерывной величины формулировано такъ: [Если область содержитъ всѣ числа, какъ соизмѣримыя, такъ и несоизмѣримыя, лежащія между нѣкоторыми числами a и b, то эта перемѣнная называется непрерывною между a и b]. Эта формулировка свидѣтельствуетъ объ очень наивномъ пониманіи того, что въ анализѣ дѣйствительно подразумѣвается подъ названіемъ непрерывности. Сказанное опредѣленіе вполнѣ опровергается нагляднымъ и характернымъ примѣромъ. Разсмотримъ величину $(-a)^x$, въ выраженіи которой a обозначаетъ постоянное, не равное единицѣ, положительное число, вслѣдствіе чего $-a$ существенно отрицательно, а x обозначаетъ положительное или отрицательное количество, измѣняющееся въ границахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Несомнѣнно, что разсматриваемое выраженіе можетъ принимать любое количественное значеніе. Если требуется, чтобы такимъ значеніемъ было произвольное положительное число A, то, введя подстановку $x=2z$ и выполнивъ преобразованіе $(-a)^{2z}=[(-a)^2]^z=(a^2)^z$, приводимъ вопросъ къ уравненію $(a^2)^z=A$, а такъ какъ всякое положительное число при положительномъ же, не равномъ единицѣ, основаніи имѣетъ соотвѣтствующій ему дѣйствительный логариѳмъ, то удовлетворить составленному уравненію выборомъ z всегда возможно. Аналогично этому, спрашивая себя, имѣетъ ли $(-a)^x$ произвольное отрицательное значеніе $-B$, вводимъ подстановку $x=2z+1$ и, выполнивъ преобразованіе $(-a)^{2z+1}=(-a)^{2z}.-a=-(a^2)^z.a$, приходимъ, отбрасывая минусы, къ уравненію $(a^2)^z=\frac{B}{a}$, въ которомъ логариѳмъ, равный z, оказывается также вполнѣ возможнымъ и доступнымъ отысканію. Выходитъ, по опредѣленію про-

фессора, что величина $(-a)^x$ непрерывна въ границахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Между тѣмъ, въ дѣйствительномъ, грамотномъ, анализѣ, необходимо считать эту же величину совершенно прерывной. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ сначала какое-нибудь соизмѣримое значеніе x въ видѣ отношенія цѣлыхъ чиселъ $\frac{u}{v}$ и замѣтимъ, что, смотря по четности или нечетности чиселъ u и v, это отношеніе можетъ имѣть формы $\frac{2k}{2l+1}$, $\frac{2m}{2n}$, $\frac{2p+1}{2q+1}$, $\frac{2r+1}{2s}$. Тогда, принявъ равенство разсматриваемаго выраженія корню $\sqrt[v]{(-a)^u}$ и припомнивъ, что $-a$ существенно отрицательно, мы найдемъ, что при u четномъ и v нечетномъ корень положителенъ, при u и v четныхъ двузначенъ, при u и v нечетныхъ отрицателенъ, при u нечетномъ и v четномъ мнимъ. Тѣмъ болѣе, при безконечно разнообразныхъ значеніяхъ x окажется, что $(-a)^x$ обладаетъ свойствомъ безконечно сложной прерывности, соотвѣтствуя на чертежѣ массѣ точекъ, расположенныхъ отдѣльно одна отъ другой.

Новое понятіе о предѣлѣ.

Подходя къ установленію понятія о предѣлѣ, г. К. объясняетъ: [Пусть будетъ x нѣкоторая перемѣнная величина, которая можетъ принимать безчисленное множество значеній. Расположимъ всѣ эти значенія въ рядъ по нѣкоторому закону и изобразимъ ихъ (въ этомъ порядкѣ) символами x_1, x_2, x_3,...., x_n,....]. Сообразно такому указанію, слѣдуетъ, при разсматриваніи, напр,, измѣненій синуса въ первомъ квадрантѣ круга, составить всѣ значенія синуса, каждое отдѣльно, собрать ихъ въ общую группу, перетасовать произвольное число разъ и затѣмъ, выбирая наудачу, расположить всѣ значенія въ рядъ, слѣва направо, изображая ихъ символами. Именно такую манипуляцію нужно произвести съ каждой перемѣнной величиной, чтобы примѣнить даваемое профессоромъ опредѣленіе понятія о предѣлѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, дальше говорится: [Мы будемъ себѣ представлять, что перемѣнная x послѣдовательно принимаетъ всѣ значенія въ этомъ ряду, слѣва направо]. Если [существуетъ такое постоянное число A, что абсолютная величина разности $A-x_n$ дѣлается и остается сколь угодно малой при достаточно большихъ значеніяхъ для n],...., [то говорятъ, что число A есть предѣлъ перемѣнной x.] Но, съ одной стороны, даже въ простѣйшемъ, вышеупомянутомъ процессѣ измѣненія синуса, нельзя найти подходящаго къ указаннымъ требованіямъ числа A. Именно, хотя, послѣ

перетасовки значеній синуса, эти значенія и расположатся въ нѣкоторомъ опредѣлившемся уже порядкѣ, но, взявъ за A, хотя бы, любое изъ чиселъ отъ 0 до 1, мы увидимъ, что разность $A-x_n$ будетъ измѣняться скачками, то увеличиваясь, то уменьшаясь, и такъ, что услѣдить за ея состояніями не представится никакой возможности. Съ другой стороны, процессъ измѣненія долженъ окончиться, когда перемѣнная x дойдетъ до значенія, выбраннаго изъ всей группы послѣднимъ. Тогда, и по здравому смыслу, и въ строго филологическомъ смыслѣ слова, настанетъ предѣлъ всему, да и сама разность $A-x_n$, если принять послѣднее значеніе за A, обратится сполна въ нуль, а потому окажется, обратно прежде доказанному, что предѣлъ не только существуетъ, но что таковымъ можетъ быть любое значеніе перемѣнной, ставшее въ ряду послѣднимъ.

Устраненіе важнѣйшаго понятія анализа.

Очевидная нелѣпость разобранныхъ только что двухъ опредѣленій,—непрерывной величины и предѣла, обусловливается тѣмъ, что г. К. въ своемъ курсѣ вполнѣ устранилъ важнѣйшее понятіе анализа, понятіе о процессѣ измѣненія. Свойство непрерывности онъ относитъ къ самому объекту величины, а не къ процессу ея измѣненія. Въ опредѣленіи предѣла, хотя и затрогивается идея измѣненія, но самое понятіе предѣла также пріурочивается значенію величины, и непрерывность таковой представляется въ прежнемъ смыслѣ. Благодаря этому, нерѣдкое у спеціалистовъ смѣшеніе понятій о процессѣ и объектѣ приводитъ къ особо крупнымъ послѣдствіямъ. Отмѣчу, что въ рецензіяхъ двухъ моихъ книгъ, г. К. заявлялъ голословно, безъ малѣйшаго указанія, что даваемое мною тамъ опредѣленіе непрерывнаго измѣненія невѣрно. Я съ своей стороны, допуская съ достаточной вѣроятностью, что мой критикъ знаетъ только опредѣленіе, указанное въ нѣкоторыхъ курсахъ анализа и дѣйствительно невѣрное, предложилъ ему высказаться по этому поводу опредѣленно, заявивъ напередъ, что опровerженіе его указанія не составитъ для меня большого труда. Упомянутое разногласіе своеобразно обойдено въ новомъ курсѣ. На всемъ протяженіи изданнаго большого тома, опредѣленіе непрерывнаго измѣненія нигдѣ не встрѣчается, несмотря на общепонятную, неизбѣжную надобность въ немъ.

Возвращаясь къ общему понятію о процессѣ измѣненій, оттѣню существеннымъ примѣромъ его значеніе. Извѣстно, что Ньютонъ и его послѣдователи опредѣляли предѣлъ, какъ послѣднее значеніе

перемѣнной величины, принимая, значитъ, что перемѣнная совпадаетъ, въ концѣ измѣненій, со своимъ предѣломъ. Съ другой стороны, французскіе академики новѣйшаго времени, какъ Бертранъ и другіе, находя такое опредѣленіе неправильнымъ, утверждали, что перемѣнная лишь безгранично приближается къ предѣлу, никогда, однакоже, его не достигая. Не можетъ быть сомнѣнія въ томъ, что представители обоихъ мнѣній одинаково впадали въ ошибку односторонности сужденія, потому что истинное заключеніе по вопросу зависитъ отъ того, какой процессъ измѣненія разсматривается. Напр., когда воображаемъ удваиваніе числа сторонъ правильнаго многоугольника, то, имѣя дѣло съ безконечно разложимымъ, но геометрически однороднымъ процессомъ измѣненія, мы ясно представляемъ себѣ его отдѣльные моменты, пока периметръ остается прямолинейнымъ, но не можемъ допустить непосредственнаго обращенія такого периметра въ соотвѣтствующую окружность, и потому довольствуемся доказательствомъ того, что разность между длинами окружности и периметра можетъ быть сдѣлана произвольно малой. Въ другомъ же примѣрѣ измѣненій, напр., воображая кругъ и въ немъ сѣкущую, которая, двигаясь параллельно начальному положенію, непрерывно приближается къ центру и, по заключительному условію, дополняющему представленіе процесса измѣненія, останавливается въ моментъ прохожденія черезъ центръ, мы, конечно, должны принять, что внутренняя часть сѣкущей достигаетъ своего предѣла—діаметра, такъ какъ иначе нельзя допустить продолженія условно остановленнаго движенія.

Игнорированіе основного постулата анализа.

Таковымъ слѣдуетъ признать положеніе: если двѣ перемѣнныя величины равны между собой во всѣ моменты процесса измѣненія, то равны и ихъ предѣлы. Принципіальное значеніе этого положенія, которое я называю постулатомъ, потому что оно въ извѣстной, но широкой степени, условно, не было до сихъ поръ достаточно оцѣнено, а это приводило и къ неясностямъ, и къ прямымъ ошибкамъ. На упомянутое положеніе нужно смотрѣть, какъ на особый уголъ зрѣнія, подъ которымъ мы видимъ и принимаемъ условно всѣ истины современнаго анализа перемѣнныхъ. Въ широкомъ смыслѣ слова, весь наличный анализъ перемѣнныхъ есть лишь ученіе о случаяхъ примѣнимости указаннаго постулата. Г. К., не упоминая совсѣмъ объ этомъ положеніи и, конечно, не понимая его значенія, практикуетъ въ своемъ курсѣ разсужденія,

способныя во множествѣ случаевъ приводить къ яснымъ ошибкамъ. Примѣромъ ошибки, встрѣчающейся, между прочимъ, и въ другихъ новѣйшихъ курсахъ анализа, является слѣдующее заключеніе: Подробно анализируя въ своихъ цѣляхъ рядъ $x+x(1-x)+x^2(1-x)^2+\dots$, представляющій кратную прогрессію съ знаменателемъ $1-x$, гдѣ $0<x<1$, профессоръ утверждаетъ, по внѣшнему виду ряда, что при $x=0$ сумма его есть 0. Вообще же онъ признаетъ, что эта сумма, какъ имѣющая при всякомъ $0<x<1$ форму $\frac{x}{x}$, постоянно равна единицѣ. Такимъ образомъ, свойство, присущее лишь суммѣ конечнаго числа слагаемыхъ, распространяется ошибочно на безконечный рядъ, и, благодаря этому, получается выводъ, противорѣчащій принципу, на которомъ строится весь анализъ. Слѣдовало бы замѣтить хотя то, что по выводѣ x общимъ множителемъ, каковое преобразованіе при сходимости ряда можетъ считаться обоснованнымъ, получается для разсматриваемаго ряда форма $x[1+(1-x)+(1-x)^2+\dots]$, принимающая при $x=0$ неопредѣленный видъ $0.\infty$, а этотъ послѣдній, какъ извѣстно, требуетъ внимательнаго къ разбору его отношенія.

Въ параллель предыдущему разсужденію, приведу примѣръ опредѣленія интегральнымъ исчисленіемъ площади прямоугольнаго треугольника, ограниченнаго прямой $y=x$ и координатами, равными a. Дѣлимъ горизонтальный катетъ a, служащій основаніемъ треугольника, на n равныхъ частей, проводимъ черезъ точки дѣленія вертикали до пересѣченія съ гипотенузой $y=x$ и строимъ входящіе въ треугольникъ узкіе прямоугольники, основаніями которыхъ служатъ равныя между собою части горизонтальнаго катета, а высотами послѣдовательныя вертикали. Если для краткости примемъ $\frac{a}{n}=\alpha$, то равныя между собою основанія прямоугольниковъ выразятся каждое черезъ α, а высоты будутъ послѣдовательно α, 2α, $3\alpha, \dots, (n-1)\alpha$. Перемножая основанія на высоты и суммируя получаемыя площади прямоугольниковъ, получимъ выраженіе $\alpha^2+2\alpha^2+3\alpha^2+\dots+(n-1)\alpha^2$, предѣлъ котораго есть площадь треугольника. Этотъ предѣлъ легко отыскивается, послѣ вывода α^2 общимъ множителемъ и суммированія получаемой въ скобкахъ разностной прогрессіи, но, полагая затѣмъ въ точности $\alpha=0$, мы все же, довѣряя постулату, признаемъ, что и при такомъ значеніи α сумма $\alpha+\alpha+\alpha+\dots$ равна не нулю, а конечному a. Придерживаясь того ошибочнаго пути мышленія, которое уклоняется отъ постулата, мы не могли бы вовсе раскрывать значенія

неопредѣленныхъ видовъ. Нельзя было бы также строить понятіе объ интегралѣ, какъ о предѣлѣ суммы.

Опредѣленіе производной.

Въ дифференціальномъ исчисленіи, какъ извѣстно, производной всегда называютъ функцію, составляемую по данной начальной функціи посредствомъ раскрытія предѣльнаго отношенія приращенія данной функціи къ приращенію аргумента. Въ геометрическомъ смыслѣ, производная отъ ординаты кривой представляетъ общее выраженіе тангенса угла, подъ которымъ касательная въ произвольной точкѣ кривой пересѣкаетъ ось абсциссъ. Въ процессѣ составленія предѣльнаго отношенія, значеніе аргумента не играетъ никакой роли, оставаясь всегда неопредѣленнымъ и подчиняясь лишь тому ограниченію, что оно должно заключаться въ границахъ, между которыми данная функція существуетъ и измѣняется непрерывно. Перемѣнными въ этомъ процессѣ являются только приращенія аргумента и функціи. Г. К., въ своемъ анализѣ, совершенно запутываетъ даже это элементарнѣйшее понятіе дифференціальнаго исчисленія. О требуемой, по существу вопроса, непрерывности данной функціи онъ не упоминаетъ ни однимъ словомъ, а говоритъ о непрерывности аргумента x, понимая это свойство въ вышеразобранномъ смыслѣ, т.-е. что этотъ аргументъ можетъ имѣть всѣ значенія внутри извѣстныхъ границъ. Составленіе производной пріурочивается не къ произвольному, остающемуся неопредѣленнымъ, значенію x, а къ значенію данному, опредѣленному. Такъ и говорится—производная для даннаго значенія x. [Если], объясняетъ профессоръ, [предѣлъ отношенія приращенія функціи къ приращенію h перемѣннаго зависитъ отъ того закона, по которому убываетъ h (напр., будетъ одинъ для $h>0$ и другой для $h<0$), то говорятъ, что для разбираемаго значенія x функція не имѣетъ производной]. На самомъ дѣлѣ, свѣдущіе математики не говорятъ ничего подобнаго, такъ какъ сказанное означало бы, что, въ такъ называемыхъ, угловыхъ точкахъ кривыхъ нѣтъ никакой касательной, тогда какъ въ дѣйствительности ихъ имѣется по двѣ, вполнѣ опредѣленныхъ.

Послѣ установленія особо изобрѣтеннаго, такъ сказать,—первичнаго опредѣленія производной, идетъ обобщеніе этого опредѣленія, нѣсколько приближающее самое понятіе къ тому, которое разсматривается обычно. Но при этомъ проявляется опять совершенно исключительная оригинальность мышленія. [Совокупность

значеній производной данной функціи для всѣхъ значеній аргумента x отъ a до b образуетъ собою новую функцію отъ x, называемую производной отъ данной функціи]. Мимоходомъ, значитъ, устанавливается, хотя и запоздалымъ актомъ, новое воззрѣніе на самое понятіе о функціи, воззрѣніе—согласное съ прежде развитымъ понятіемъ о непрерывной величинѣ. По крайней мѣрѣ, тѣ функціи, которыя могутъ считаться производными отъ нѣкоторыхъ данныхъ функцій, должны быть опредѣляемы, какъ совокупности всѣхъ принимаемыхъ ими безконечно разнообразныхъ значеній. Это, съ одной стороны, чрезвычайно расширяетъ вздернутое полетомъ мысли прежнее понятіе, потому что представленіе безконечно сложнаго комплекса, разумѣется, шире представленія въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ только единой функціи. Но, съ другой стороны, это приводитъ и къ упрощающему дѣло объединенію, позволяя не различать многія функціи, потому, напр., что всякое количество въ границахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$ можетъ быть съ одинаковымъ правомъ принято и за кубъ аргумента, и за логариѳмъ его, и за тангенсъ, и т. под..

Основная теорема новаго анализа.

Вслѣдъ за утвержденіемъ опредѣленія производной, г. К. формулируетъ теорему, которую дальше принимаетъ за основную для вывода всѣхъ другихъ главныхъ, во всемъ ученіи о функціяхъ: [Отмѣтимъ слѣдующую весьма важную теорему: если функція для какого-нибудь значенія аргумента существуетъ и имѣетъ конечную производную, то эта функція непрерывна для этого значенія аргумента]. Такъ это и въ самомъ дѣлѣ кажется, при наивномъ представленіи о функціи и ея связи съ производной. На самомъ дѣлѣ, указанная теорема, въ примѣненіи къ нѣкоторымъ, даже элементарнымъ, функціямъ, оказывается совершенно ложной. Возьмемъ общеизвѣстную, опредѣленную однозначно, функцію arcctgx. Производная ея есть $-\frac{1}{1+x^2}$. При $x=0$ производная получаетъ конечное значеніе -1, одинаковое для приближенія аргумента къ нулю со стороны, какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ его значеній. По указанной теоремѣ, функція должна считаться непрерывной при $x=0$. На самомъ дѣлѣ, при этомъ значеніи аргумента, функція обнаруживаетъ прерывъ, переходя со значенія $-\frac{\pi}{2}$ непосредственно въ $+\frac{\pi}{2}$. На чертежѣ, этой функціи соотвѣтствуетъ разорванная на двѣ части кривая, которой правая

верхняя часть начинается отъ оси ординатъ на высотѣ $+\frac{\pi}{2}$ и опускается асимптотически къ оси абсциссъ, а лѣвая нижняя начинается асимптотически подъ осью абсциссъ и, удаляясь отъ нея книзу, доходитъ до той же оси ординатъ, но на разстояніи $-\frac{\pi}{2}$ отъ начала.

На разсмотрѣнной теоремѣ г. К. строитъ всю главную сущность аналитическаго ученія о функціяхъ, теоремы Ролля, Лагранжа и, значитъ, также всѣ слѣдствія. утверждая постоянно, что все это ученіе распространяется на функціи, которыя обязаны для этого только существовать и имѣть конечную производную. Разумѣется, все это въ примѣненіи къ примѣрамъ, подобнымъ указанному, оказывается опять-таки ложнымъ. Напр., аналитическая функція, правильно характеризованная, при переходѣ отъ значенія a въ другое b, въ нормальномъ процессѣ измѣненія аргумента, проходитъ черезъ всѣ промежуточныя, т.-е. алгебраическія среднія, значенія. Въ приведенномъ же примѣрѣ, замѣтивъ, что $\operatorname{arcctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, а $\operatorname{arcctg}(+1)=+\frac{\pi}{4}$, мы видимъ, что при алгебраическомъ возрастаніи аргумента x отъ -1 до $+1$, функція y не проходитъ ни черезъ одно значеніе внутри промежутка $-\frac{\pi}{4}<y<+\frac{\pi}{4}$, а идетъ исключительно по внѣшнимъ значеніямъ $-\frac{\pi}{4}>y>-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}>y>+\frac{\pi}{4}$.

Существованіе производной.

Желая, вѣроятно, щеголять строгостью своего изложенія, г. К., на каждомъ шагу, упоминая о производной, немедленно оговаривается,—[если она существуетъ], и, такимъ образомъ, эта, получившая недавно значеніе, оговорка вдалбливается въ головы студентовъ—если не сотни, то, по крайней мѣрѣ, многіе десятки разъ. Профессоръ, видимо, не уяснилъ себѣ, что отмѣченное уклоненіе отъ обычнаго свойства функцій проявляется лишь тѣми изъ нихъ, которыя спеціально напоказъ выдуманы любителями математическихъ курьезовъ, и то, за исключеніемъ крайне рѣдкихъ и натянутыхъ представленій, лишь при исключительныхъ значеніяхъ аргумента. Ни одна изъ безконечно разнообразныхъ функцій, разсматриваемыхъ въ анализѣ ради ихъ реальной надобности, не даетъ повода даже упоминать о такой особенности. Поэтому, признавая законнымъ упоминаніе объ исключительности,

напр., при установленіи понятія о производной и еще, пожалуй, одинъ, два раза въ подходящихъ случаяхъ, нельзя не считать безпрерывное долбленіе одного и того же совершенно лишнимъ и неумѣстнымъ пустословіемъ.

Однозначность аналитическихъ функцій.

Въ характерную параллель только что указанной неумѣстной заботливости о существованіи производной, приходится отмѣтить, что г. К. совсѣмъ не заботится о соблюденіи нѣкоторыхъ основныхъ требованій анализа. Необходимую оговорку объ однозначности подвергаемой изслѣдованію функціи онъ не дѣлаетъ ни одного раза при всѣхъ доказательствахъ важнѣйшихъ теоремъ анализа. Эту оговорку я послѣ значительныхъ усилій нашелъ лишь при опредѣленіи понятій о предѣлѣ и производной. Но, если мы припомнимъ, что въ послѣднемъ случаѣ двузначную производную въ угловой точкѣ кривой нашъ профессоръ не только не усматриваетъ, но и признаетъ таковую несуществующей, и замѣтимъ еще, что при отысканіи производныхъ многозначность функціи не приводитъ ни къ какимъ недоразумѣніямъ, такъ какъ различныя значенія функціи дифференцируются отдѣльно, то, пожалуй, не отринемъ гипотезы, что и указанныя рѣдкія и не на подлежащихъ мѣстахъ сдѣланныя замѣтки объ однозначности высказаны наобумъ, безъ сознательной оцѣнки того, что сказано. Во всякомъ случаѣ, отмѣтки надлежащаго требованія въ такихъ не подходящихъ мѣстахъ нисколько не гарантируютъ отъ недоумѣній въ примѣненіяхъ теоремъ анализа. Здѣсь, изучающіе разсматриваемый курсъ могутъ оказаться въ полномъ заблужденіи. Вообразимъ, напр., кривую лемнискату, имѣющую на обычномъ чертежѣ форму горизонтально положенной восьмерки. Пересѣчемъ оба овала ея осью абсциссъ гдѣ-либо ниже общей точки вѣтвей и обозначимъ внутреннія пересѣченія осью абсциссъ черезъ A и B, а общую точку вѣтвей черезъ C. Ордината этой кривой вездѣ непрерывна. Тѣмъ не менѣе кривая на всемъ протяженіи ея отъ A къ C и затѣмъ по кратчайшему пути къ B не подчиняется вовсе теоремѣ Ролля и въ частности Лагранжевой, такъ какъ нѣтъ касательной, параллельной оси абсциссъ, и нѣтъ ни одной касательной, параллельной какой-либо изъ хордъ, проводимыхъ слѣва отъ точки C и направо отъ послѣдней.

